COMPTE RENDU

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 25 SEPTEMBRE 1854.

PRÉSIDENCE DE M. COMBES.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS
DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

ASTRONOMIE. — *Nouvelle détermination de la différence de longitude entre les Observatoires de Paris et de Greenwich; par* M. AIRY, Directeur de l'Observatoire royal de Greenwich, et M. LE VERRIER, Directeur de l'Observatoire impérial de Paris.

« La recherche de la différence de longitude entre deux lieux du globe repose, comme on le sait, sur celle de la différence des temps que l'on compte dans les deux stations à un moment donné, celui par exemple où l'on observe un même signal en ces deux stations. Lorsqu'on fait ainsi usage de signaux, l'opération se divise en deux parties distinctes, celle de la détermination de l'état des pendules et celle de l'observation des signaux. Disons, dès à présent, que nous avons fait usage de signaux transmis par le télégraphe électrique.

» La détermination de l'heure et l'observation des signaux sont sujettes à des erreurs de plus d'un genre, et qui pourraient vicier le résultat qu'on se propose d'obtenir, si l'on ne prenait soin de les éliminer ou de les apprécier de manière à pouvoir en tenir compte. Nous allons rappeler, en peu de mots, en quoi consistent ces erreurs, et indiquer comment on a conduit l'opération pour se mettre à l'abri de leur influence. Le soin avec lequel ont été

éliminées toutes les erreurs constantes est sans doute ce qui distingue la détermination actuelle de celles qui l'ont précédée.

» Lorsqu'on détermine l'heure d'un lieu par l'observation des passages des étoiles à la lunette méridienne, une grave difficulté provient des erreurs personnelles des observateurs, erreurs qui peuvent produire des discordances s'élevant jusqu'à une seconde de temps entre les déterminations de l'heure d'un même lieu, faites par divers astronomes. Les déterminations de longitudes dans lesquelles on ne s'est point mis à l'abri de cette cause d'incertitude, doivent nécessairement inspirer peu de confiance. On peut échapper à cet inconvénient, en calculant la longitude au moyen de deux séries d'opérations entre lesquelles on fait l'échange des observateurs.

» S'il était nécessaire que l'on connût l'instant précis auquel un signal électrique est donné par l'une des stations, on pourrait éprouver quelques difficultés à le fixer avec précision : on évite cet embarras en donnant le signal à un instant quelconque, et en le faisant observer de la même manière dans les deux stations. Dans le cas où il existerait une différence entre les observateurs, relativement à la constatation de l'heure des signaux, cette différence disparaîtrait du résultat final par l'échange des observateurs.

» Un retard peut aussi provenir de la durée nécessaire pour la transmission du courant électrique, et l'on a plus de raison de le craindre lorsque le courant doit traverser une grande étendue d'eau. On échappe à l'incertitude qui en pourrait résulter, en faisant partir les signaux successivement de l'une et de l'autre station. Cette disposition permet, en outre, de mesurer le retard en question. On pourra même, pour plus de sécurité, varier convenablement le sens physique du courant.

» Enfin on eût pu craindre quelque erreur provenant tant de l'inertie des appareils que du changement d'intensité du courant. Après avoir reconnu, par des expériences directes, que les appareils qui vont être décrits n'étaient pas sujets à cet inconvénient, on a jugé inutile de les échanger entre les stations.

» Ces explications générales étant données, on comprendra mieux le sens de la convention intervenue entre les deux observatoires, et dont nous allons rappeler quelques-unes des principales dispositions.

» L'appareil à signaux observé dans chaque station était une simple aiguille recevant l'action directe d'un courant électrique. On s'attachait à observer le commencement sensible du mouvement de l'aiguille.

» Chaque observatoire disposait d'une pile électrique composée d'un grand nombre d'éléments. On pouvait, à volonté, renverser le sens du courant qu'on envoyait à l'autre observatoire : ce courant, d'ailleurs, traversait toujours les appareils des deux stations.

» L'appareil dont on se servait pour donner les signaux était placé dans une autre salle que l'aiguille, afin que l'astronome qui observait celle-ci ne pût ni voir ni entendre la personne qui donnait les signaux.

» Les signaux ont été envoyés par groupes, dont le nombre et l'instant approché étaient indiqués télégraphiquement quelques moments à l'avance; cette disposition ayant pour but de ménager l'attention de l'observateur, et de lui éviter une fatigue préjudiciable à l'exactitude des observations. Chaque groupe comprenait 10 signaux environ, donnés de dix à quinze secondes d'intervalle.

» Les observations des signaux ont duré une heure chaque jour. L'heure a été divisée en quatre quarts d'heure. Dans le premier et le troisième quart d'heure, les signaux étaient donnés par l'une des stations; dans le deuxième et le quatrième, par l'autre station. On avait le soin, dans chaque station, de renverser le sens du courant dans la seconde série de signaux.

» Pour faciliter l'élimination des erreurs personnelles par l'échange des observateurs, ces observateurs ont été chargés d'observer les passages des étoiles et les signaux électriques.

» L'état des pendules a été, dans les deux stations, fixé précisément à l'aide des mêmes données astronomiques; ou bien on n'a fait usage que des mêmes étoiles, auquel cas leurs positions absolues n'ont aucune importance; ou bien, si l'on a fait usage d'étoiles dont quelques-unes pouvaient n'avoir point été observées dans l'une des deux stations, on ne l'a fait qu'à l'égard des étoiles dites *fondamentales*, et dont les positions relatives sont connues avec la dernière précision. Il a été convenu qu'on calculerait séparément les résultats fournis par les deux méthodes.

» Tout en estimant que dans le cas où le temps se prêterait convenablement aux observations astronomiques, il suffirait peut-être de continuer les signaux pendant trois jours, pour chacune des deux positions relatives des observateurs, il avait été convenu que les observations seraient continuées toutes les nuits, jusqu'à ce que l'un et l'autre observatoire eussent fait connaître qu'ils regardaient l'opération comme terminée.

» En conséquence de ces conventions, M. Dunkin, assistant de l'Observatoire de Greenwich, s'étant rendu à Paris, et M. Faye, astronome de l'Ob-

servatoire de Paris, s'étant rendu à Greenwich, les observations de la première série ont pu commencer dans la soirée du 26 mai dernier. Elles n'ont pas été favorisées par l'état de l'atmosphère : les nuages ont souvent entravé les observations astronomiques, et la tempête a quelquefois empêché la transmission des signaux électriques. On a dû, en conséquence, prolonger cette première série d'observations jusqu'au 4 juin.

» Si l'on s'astreint à n'employer que les jours d'observations dans lesquels un nombre suffisant d'étoiles communes ont été observées dans les deux stations, quatre jours seulement peuvent être mis à profit, pendant lesquels il a été échangé 563 signaux télégraphiques utilement observés.

» Si, au contraire, on fait usage de toutes les fondamentales indifféremment, on a cinq jours d'observations et 708 signaux utiles.

» La moitié de ces signaux est partie de Greenwich, l'autre de Paris.

» Ajoutons qu'on peut, pour déterminer le retard provenant de la transmission du courant électrique, faire usage de signaux envoyés dans les jours où il n'a pas été fait d'observations astronomiques. Ces signaux sont au nombre de 252.

» Les observations de la deuxième série ont commencé le 12 juin, et ont été faites, à Greenwich par M. Dunkin, à Paris par M. Faye. Contrariées, comme les premières, par l'état de l'atmosphère, elles ont été continuées jusqu'au 24 juin. Sept jours d'observations ont pu être utilisés, soit qu'on n'employât que les étoiles communes, soit qu'on eût recours à toutes les fondamentales indistinctement : 995 signaux ont été utilement échangés.

» L'ensemble de toutes ces données ayant été discuté séparément, à Greenwich et à Paris, on est arrivé aux conclusions suivantes, dans lesquelles nous distinguerons, par les lettres A et B, les résultats obtenus : 1° en faisant usage de toutes les fondamentales indistinctement; 2° en employant seulement les étoiles observées le même jour dans les deux observatoires.

RÉSULTATS OBTENUS A GREENWICH.					RÉSULTATS OBTENUS A PARIS.				
	DATES.	NOMBRE de signaux.	DIFF. DE LONGITUDE A.	DIFF. DE LONGITUDE B.		DATES.	NOMBRE de signaux.	DIFF. DE LONGITUDE A.	DIFF. DE LONGITUDE B.
			m s	m s				m s	m s
1re SÉRIE.	1854. Mai 27	146	9.20,40	9.20,38	1re SÉRIE.	1854. Mai 27	145	9.20,38	9.20,36
	29	146	20,59	20,56		29	145	20,58	20,55
	31	147	20,54	20,56		31	147	20,54	20,56
	Juin 3	145	20,45	»		Juin 3	145	20,44	»
	4	124	20,49	20,53		4	125	20,49	20,53
	Moyennes.......		9.20,49	9.20,51		Moyennes.......		9.20,49	9.20,50
2e SÉRIE.	Juin 12	132	9.20,77	9.20,76	2e SÉRIE.	Juin 12	130	9.20,79	9.20,76
	13	132	20,79	20,77		13	133	20,78	20,76
	17	140	20,77	20,75		17	140	20,77	20,75
	18	137	20,69	20,73		18	137	20,69	20,73
	20	148	20,74	20,75		20	150	20,75	20,76
	22	155	20,79	20,74		22	154	20,80	20,74
	24	151	20,84	20,84		24	151	20,84	20,84
	Moyennes.......		9.20,77	9.20,76		Moyennes.......		9.20,77	9.20,76
	Longitude conclue..		9.20,63	9.20,63		Longitude conclue..		9.20,63	9.20,63

» Si l'on veut rapporter la position de l'Observatoire de Greenwich à l'ancienne méridienne de France, il faudra retrancher du résultat précédent la quantité $0^s,12$ qui représente la distance entre cette méridienne et la situation actuelle de la lunette méridienne de l'Observatoire de Paris. On aura ainsi : $9^m 20^s,51$.

» Le temps de la transmission du courant électrique a été trouvé, en moyenne, de $0^s,086$ à Greenwich, et de $0^s,079$ à Paris.

» Nous ne ferons sur ces nombres que deux remarques :

» 1°. La différence de longitude $9^m 20^s,63$, ainsi trouvée entre Paris et Greenwich, diffère de près d'une seconde de temps de celle déduite de l'observation des signaux de feu, en 1825;

» 2°. La durée $0^s,08$ du temps nécessaire à la transmission du courant électrique n'est sans doute si considérable qu'à cause de la disposition du câble au travers duquel le courant traverse la mer.

» Nous publierons prochainement tous les détails de cette opération dans un Mémoire spécial. »

« Après cette communication, M. Le Verrier présente les remarques suivantes : premièrement, sur l'opération actuelle en ce qui concerne l'Observatoire de Paris; secondement, sur les opérations antérieurement exécutées pour arriver à la connaissance de la différence de longitude entre Paris et Greenwich.

» Lorsque, en 1850, on donna à nos télégraphes électriques la première extension importante, la Commission de l'Assemblée législative, dont je fus le Rapporteur, ajouta plusieurs lignes au projet du Gouvernement, et entre autres la ligne de Dunkerque, sur laquelle elle s'exprimait en ces termes : « La ligne de Dunkerque présente, en dehors des intérêts généraux que » nous avons exposés, un intérêt scientifique. Dunkerque se trouve sous le » méridien de Paris, et renferme l'une des stations extrêmes de la grande » triangulation qui a servi à la mesure du méridien de France. Or la propa- » gation instantanée du fluide électrique donnant un moyen de déterminer » les longitudes avec précision, il sera utile, dès que cette ligne sera ache- » vée, de comparer la détermination que le télégraphe électrique fournira » pour la longitude de Dunkerque, aux valeurs qui ont été obtenues, soit » par la triangulation, soit par des observations directes. »

» Bientôt après, la *ligne sous-marine* qui relie Douvres à Calais ayant été construite, on conçut naturellement la pensée de mettre cette ligne à profit pour déterminer la différence de longitude entre Greenwich et Paris, et ce fut dans ce but qu'on posa, il y a déjà plusieurs années, sur la demande de mon illustre prédécesseur, M. Arago, un fil entre l'Administration des télégraphes et l'Observatoire, ainsi que les fils et appareils de communication intérieure.

» C'est dans cet état que j'ai trouvé la question.

» Avant tout, il me parut nécessaire d'étudier complétement la valeur réelle des appareils télégraphiques à employer et surtout les conditions dans lesquelles se trouvait l'instrument des passages destiné à donner l'heure de Paris, cette détermination de l'heure ayant toujours été la partie faible des mesures antérieures. Je me bornerai, afin d'abréger, à donner comme exemple de ce qui a été fait, le nivellement de l'axe de la lunette méridienne, nivellement dont la précision a une si haute importance dans la question actuelle.

» Le niveau dont on se servait alors ne reposait pas sur les parties frottantes des tourillons, mais bien sur leur prolongement en dehors des coussinets; en sorte que l'opération du nivellement n'avait de valeur qu'autant qu'on supposait que cette partie extérieure des tourillons était

le prolongement géométrique de la partie intérieure. Or, en supposant que par son extrême habileté l'artiste fût parvenu à réaliser cette condition dans l'origine (ce que rien n'établit, et, au contraire), pouvait-on raisonnablement espérer qu'il en devait être encore de même aujourd'hui, après que, pendant dix-huit ans, la partie frottante et la partie extérieure des tourillons ont été soumises à des causes d'altération et d'usure si diverses?

» Non assurément; et, loin de là, nous avions des raisons de croire le contraire. En effet, on n'obtenait pas la même inclinaison de l'axe lorsqu'on faisait varier la hauteur de la lunette, fait qui accusait nécessairement, ou bien un défaut réel dans la construction de la partie frottante de cet axe, ou bien un défaut dans la partie sur laquelle reposait le niveau. En outre, une étude de la forme des tourillons, faite avec notre habile artiste M. Brunner, accusait un défaut de circularité dans l'une des parties sur laquelle on posait le niveau.

» Il n'était pas possible de commencer, dans de telles conditions, une opération qui demandait qu'on ne laissât pas de prise à des objections auxquelles on n'aurait pu répondre.

» Deux voies s'offraient pour sortir d'embarras : ou bien on laisserait de côté le niveau, et l'on ferait usage de la réflexion de l'image du réticule de la lunette sur un bain de mercure; ou bien on construirait un nouveau niveau dont les points d'appui seraient sur la partie frottante des tourillons.

» J'aurais assurément préféré le premier parti, qui, lorsqu'on peut l'employer, permet d'obtenir l'inclinaison de l'axe rapidement et à tout instant, et qui offre l'avantage de ne donner lieu à aucune opération particulière sur l'instrument lui-même; mais une difficulté insurmontable s'est présentée. Cette difficulté ne résidait pas dans l'embarras, pour l'observateur, de monter au haut d'une assez grande lunette placée dans une position verticale, encore bien qu'il soit difficile d'installer, après coup, les appareils nécessaires; mais bien dans l'impossibilité d'obtenir un bain de mercure suffisamment stable à tous les instants de la journée. Très-malheureusement les piliers des instruments méridiens sont solidaires du reste de l'édifice. Leurs fondations ont été poussées, il est vrai, jusqu'au fond des catacombes, mais les puits dans lesquels ils ont été construits ont ensuite été complétement comblés, et, de plus, la partie supérieure des piliers est, dans toute son étendue, encastrée dans les pieds-droits des voûtes qui portent l'observateur et l'édifice; en sorte qu'on ne saurait imaginer

une disposition plus propre à transmettre aux piliers les vibrations du sol environnant; et que, si cette disposition est évitée avec le plus grand soin, même dans les observatoires établis en pleine campagne, il eût été, à plus forte raison, à désirer qu'on ne l'eût pas rencontrée dans la partie récemment construite d'un observatoire placé dans une grande ville.

» Quoi qu'il en soit, et bien que je doive changer un tel état de choses, (je rendrai compte ultérieurement de ce qui a déjà été fait à l'égard du pilier du cercle de Gambey), dans la crainte de retarder trop la mesure de la longitude, j'ai dû me déterminer pour le second parti, savoir : un niveau reposant sur la partie frottante des tourillons. Les difficultés de la construction de ce niveau à adapter sur un instrument où il n'avait pas été tenu compte de la condition que nous voulions remplir ont été heureusement surmontées par M. Brunner, qui nous a construit un excellent appareil d'une grande fixité et d'une grande précision.

» Or, d'une étude très-soignée de l'axe de la lunette méridienne faite au moyen de ce niveau, il est résulté :

» 1°. Que la différence entre les résultats obtenus par des nivellements faits dans des positions diverses de la lunette a immédiatement disparu, et qu'ainsi cette différence tenait bien au mode vicieux de la disposition qui consistait à faire reposer le niveau sur les prolongements des tourillons;

» 2°. Qu'il existe entre les diamètres des deux tourillons une légère différence que nous avons déterminée, et dont il est utile de tenir compte quand on veut avoir l'heure absolue;

» 3°. Que l'axe de la lunette méridienne est loin d'avoir la stabilité désirable, et qu'indépendamment d'une variation annuelle, dont l'amplitude est fort considérable, l'inclinaison présente, dans une certaine condition de température, une variation diurne très-notable et qu'on ne peut négliger dans des opérations délicates.

» Cette variation diurne, qui a été insensible pendant la première série des observations faites avec Greenwich, s'est au contraire manifestée pendant la seconde série. Hâtons-nous d'ajouter que le résultat de la longitude n'en a été nullement affecté, attendu le soin qu'on a eu de déterminer très-fréquemment la situation de l'axe, comme la valeur des autres erreurs instrumentales.

» Tandis qu'autrefois les déterminations des erreurs instrumentales ne se faisaient que d'une manière irrégulière et qu'on a pu rester des mois entiers sans déterminer l'inclinaison de l'axe, et plus d'une demi-année sans s'occuper de la collimation de l'instrument, les erreurs instrumentales, après avoir

été l'objet de la même étude que le niveau, sont aujourd'hui déterminées régulièrement comme il suit :

» *L'inclinaison de l'axe*, trois fois par jour, à 8 heures du matin, 4 heures du soir et minuit;

» *L'azimut*, tous les jours à 4 heures du soir;

» *La collimation*, le mardi de chaque semaine.

» Je chercherai à supprimer ces anomalies dans l'inclinaison de l'axe de la lunette méridienne. Mais je n'ai pas voulu le faire avant que, par une étude, très-pénible il est vrai pour les observateurs, ces anomalies aient été assez connues pour qu'il en résulte, s'il est possible, un perfectionnement dans la discussion des observations antérieures.

» Les conditions de l'appareil électrique ont été étudiées avec le même soin.

» J'ai hâte de dire que pour tout ce qui concerne les transmissions télégraphiques, nous avons trouvé dans l'Administration, dirigée par M. de Vougy, un concours aussi bienveillant et aussi éclairé que nous pouvions l'attendre. Non-seulement les fils nécessaires à nos signaux ont été mis à notre disposition pendant la nuit et le jour, nos dépêches ont été transmises, mais l'Administration télégraphique a bien voulu attacher spécialement à cette opération un de ses inspecteurs, M. Faure, dont le concours nous a été très-précieux, notamment pour donner la précision nécessaire à l'installation de nos communications électriques.

» J'ai déjà dit que les observations ont été faites, pour l'Observatoire de Paris, par M. Faye. Les réductions et les calculs ont été faits avec le plus grand soin par M. Yvon Villarceau.

» Je désire, enfin, que l'Académie me permette de mettre sous ses yeux le dossier complet dans lequel sont comprises toutes les pièces relatives à la mesure actuelle : correspondance, opérations astronomiques, transmission des signaux et calculs. Ce dossier sera conservé avec le plus grand soin, comme propriété de l'État, et afin qu'on soit toujours à même de contrôler l'exactitude ou les défauts du travail. J'ajoute qu'il en sera de même ultérieurement de toutes les pièces scientifiques, afin d'éviter qu'à l'avenir l'Observatoire ne se trouve privé de toute espèce de documents sur les opérations extraordinaires, comme il l'est aujourd'hui.

» Après avoir dit avec quel soin la nouvelle détermination a été traitée à l'Observatoire de Paris, et il en a été de même à Greenwich, j'arrive à la comparaison du résultat avec les données antérieures.

» On a successivement appliqué à la mesure difficile de la distance en longitude des deux observatoires toutes les ressources que l'esprit humain a pu se procurer : les éclipses de Soleil, les occultations d'étoiles par la Lune, les éclipses des satellites de Jupiter, les variations des coordonnées lunaires, les signaux de feu produits par l'explosion de fusées qui s'élèvent à de grandes hauteurs et dont la lumière se voit à de grandes distances, les triangulations géodésiques, enfin le transport simultané d'un grand nombre de montres marines, portant alternativement l'heure de Paris à Londres et l'heure de Londres à Paris. Tous ces moyens sont dépassés de beaucoup en précision et en certitude par la transmission électrique des signaux.

» Les résultats obtenus par leur emploi ont prouvé que les déterminations antérieures étaient beaucoup plus éloignées de la vérité qu'on n'aurait pu le croire; et comme la discussion de ces questions intéresse, non-seulement l'astronomie, mais encore la théorie de la figure de la Terre et la vérification des immenses travaux géodésiques qui ont servi de base aux cartes de France et d'Angleterre, il est essentiel de jeter un coup d'œil sur les opérations antérieures, afin de montrer par où elles ont pu pécher, et à quelles conditions une d'entre elles pourrait servir *par sa combinaison* avec la mesure récente.

» La première mesure importante date de 1790. Elle a été exécutée par le général Roy pour l'Angleterre, et par MM. Cassini, Méchain et Legendre pour la France. La méthode employée consiste à relier les deux points extrêmes par une série de grands triangles géodésiques passant par-dessus la mer. Cette belle mesure, qui ouvre l'ère de la géodésie moderne, donne, pour la différence de longitude des deux observatoires, $9^{m}\ 18^{s},8$.

» A cette époque, l'opération principale, qui consiste à orienter sur le terrain un des côtés du réseau de triangles, aurait pu donner prise à quelques critiques, car elle est encore de nos jours une des parties les plus délicates de la géodésie. Mais si l'on songe que les stations extrêmes étaient des observatoires, où la direction du méridien est parfaitement déterminée, on conviendra que la mesure de 1790 mérite encore aujourd'hui de figurer ici avec les mesures postérieures.

» La seconde mesure géodésique a été exécutée en 1821, 1822 et 1823, par les capitaines Kater et Colby pour l'Angleterre, et de Calais à Paris par les astronomes français. Nous pourrions nous borner à cette simple mention; car la partie française de ces opérations, c'est-à-dire la partie comprise entre Calais et Paris, est restée inédite. Après avoir attendu en vain cinq années les résultats de calculs qui ne devaient jamais voir le jour, on

ne sait par quels motifs, le capitaine Kater s'est décidé, en 1828, à publier la partie anglaise dont voici le résultat :

Longitude de Greenwich à l'ouest de Calais ...... $1^o\ 51'\ 18'',73$.

Puis, afin de tirer un parti quelconque de tant de travaux, il a emprunté à la *Connaissance des Temps*, en l'absence, dit-il, d'une autorité plus haute, la longitude de Calais. La somme de ces deux nombres lui donne $2^o\ 20'\ 17'',73$ pour la différence des méridiens des deux observatoires, c'est-à-dire $9^m\ 21^s,18$ en temps.

» La moyenne des deux résultats que nous venons de citer est $9^m\ 20^s,0$.

» Il est malheureux, au point de vue de la théorie de la figure de la Terre, que l'on ait méconnu la nécessité de publier au moins, sinon de calculer immédiatement, la partie de la triangulation qui a été confiée aux astronomes français; car ce n'est qu'à la condition de comparer la longitude fournie par ces mesures avec la longitude déterminée directement, soit par les signaux de feu, soit par les signaux électriques, que l'on pourrait en tirer quelque conclusion utile sur la configuration locale du globe terrestre. Mais ces conclusions ne sauraient avoir de valeur, tant que les vérifications essentielles que toute opération géodésique comporte et présente, n'auront pas été obtenues. Par exemple, il faudrait qu'en partant de l'azimut du premier côté, celui de Greenwich à la station voisine, et en calculant successivement de triangle en triangle les azimuts des côtés suivants, on reproduisît celui du dernier côté aboutissant à l'Observatoire de Paris. S'il se trouvait une différence, et que cet écart se trouvât confirmé par notre opération récente, il y aurait là une précieuse indication sur la forme locale du sphéroïde terrestre. On en peut dire autant des latitudes extrêmes de cette chaîne de triangles. Malheureusement on ne sait même pas ce que les triangles français sont devenus.

» Le colonel Bonne proposa de déterminer directement par des signaux de feu cette différence de longitude que la mesure précédente aurait dû donner. Les opérations furent exécutées, en 1825, par MM. Herschel et Sabine pour l'Angleterre, et par MM. Bonne et Largeteau pour la France. Le temps absolu a été déterminé à Greenwich et à Paris par les astronomes des deux observatoires. Tout a été publié par sir J. Herschel dans les *Transactions philosophiques*, sauf les données qu'aurait dû fournir l'Observatoire de Paris; là encore manquent certains moyens essentiels de contrôle et de vérification. Il s'était glissé quelques erreurs dans les calculs exécutés à Greenwich; M. Henderson, qui les a découvertes, parce que la publica-

tion était complète de ce côté, a donné, pour résultat final, $9^m 21^s,46$, en supposant, comme il était bien forcé de le faire en l'absence des *data* indispensables, dit-il, qu'à l'autre extrémité de la ligne aucune erreur n'avait été commise.

» En 1838, M. Dent, célèbre horloger de Londres, transporta douze de ses chronomètres de Greenwich à Paris, et les rapporta de Paris à Greenwich, après les avoir comparés chaque fois avec les pendules sidérales des deux observatoires. La moyenne des résultats fournis par ces chronomètres fut de $9^m 22^s,1$ par l'aller et de $9^m 20^s,5$ par le retour. Ce procédé n'a pas toute l'exactitude désirable en pareille matière. Les résultats qu'il fournit ne portent pas en eux-mêmes de contrôle suffisant et dépendent par trop de l'habileté du constructeur de ces appareils délicats. Aussi les astronomes qui ont eu recours à cette méthode ne se sont-ils crus garantis contre les chances d'erreur qu'à la condition d'employer un nombre très-grand de chronomètres.

» Les résultats fournis par les deux méthodes précédentes sont viciés par une cause d'erreur dont il est singulier qu'on ne se soit préoccupé ni en 1825 ni en 1838. Cette cause d'erreur réside dans la détermination de l'heure par des individus différents dans les deux observatoires. On sait depuis longtemps, depuis Maskelyne, l'illustre prédécesseur de Pond et de M. Airy, l'astronome royal actuel d'Angleterre, qu'il ne suffit pas d'étudier les défauts de nos instruments de cuivre et de verre : que l'organisme humain, considéré comme un appareil d'observation, a lui-même ses erreurs plus ou moins régulières et constantes, tout comme un cercle divisé, une pendule ou une lunette méridienne. Que l'on demande l'heure à un astronome, il la déterminera avec une précision extrême, à 2 ou 3 centièmes de seconde par exemple, par une série d'observations convenables. On se convaincra de l'exactitude de ses résultats par l'accord frappant qu'ils offriront entre eux. Appliquez-y le calcul des probabilités, et vous trouverez qu'il y a mille ou dix mille à parier contre un que cet observateur ne se sera pas trompé de la petite quantité que nous venons d'énoncer. Mais adressez-vous à un autre astronome qui se servira de la même pendule, de la même lunette méridienne, des mêmes astres, des mêmes formules, des mêmes éléments de calcul, et il se trouvera que les nouveaux résultats, tout aussi certains en apparence que les premiers, en différeront pourtant, non pas de 2 ou de 3 centièmes de seconde, mais bien d'un tiers, de la moitié de la seconde, même d'une seconde entière et au delà. Et il est impossible d'attribuer ces discordances aux erreurs accidentelles de l'observation; ces discordances

sont constantes, elles sont dues à certaines particularités physiologiques, à certaines affections de l'appareil nerveux qui sert à coordonner nos mouvements ou nos impressions.

» Comment éliminer ces singulières erreurs? En procédant pour l'organisme humain comme pour tous les autres appareils dont nous nous servons. Lorsqu'il s'agit de déterminer avec précision la différence de deux quantités, il faut employer les mêmes instruments pour les mesurer l'une et l'autre, parce que, dans la soustraction des résultats, les erreurs constantes et communes disparaissent. Or, si l'on considère que toute mesure se résout en une estime où intervient le cerveau de l'observateur, il deviendra évident qu'aucune différence ne saurait être exacte, à moins qu'elle ne soit appréciée par le même individu.

» En discutant à ce point de vue les mesures précédentes, on voit qu'il n'y a pas de raison pour compter sur le résultat à une seconde près ou même davantage. Cette conclusion est contradictoire avec les espérances ou les appréciations de l'époque. Mais elle est incontestable, et nous ne pouvons assez nous étonner qu'on n'ait pas pris en considération une source d'erreurs alors parfaitement connue. Disons cependant que le reproche ne doit tomber ni sur les savants anglais, MM. Herschel et Sabine, ni sur les savants français, MM. Bonne et Largeteau, qui n'ont pris part qu'à des opérations irréprochables, et qui les ont admirablement exécutées.

» M. Bouvard a déterminé, en 1821, la différence de longitude, dont nous nous occupons, par une méthode purement astronomique, par la comparaison des ascensions droites de la Lune, observées dans les deux observatoires. Pendant les $9^{m} 20^{s}$ environ de temps lunaire que la Lune met à passer d'un méridien à l'autre, son ascension droite augmente d'environ 19 secondes en moyenne. Réciproquement, la mesure de cette variation fera connaître l'intervalle de temps qui sépare les deux méridiens. Mais on conçoit que déduire la différence des méridiens par des observations qui ne portent que sur une variation trente fois plus petite, c'est se placer dans une condition fort peu favorable, comme toutes les fois qu'il s'agit de conclure du petit au grand. La méthode suivie par M. Bouvard et plus tard par M. Goujon, avec des modifications conseillées par Nicolaï et Baily, ne peut donc donner quelque exactitude qu'à la condition d'accumuler un très-grand nombre d'observations. Mais là n'est pas la difficulté réelle.

» On avait espéré éliminer ainsi les erreurs personnelles des observateurs, erreurs qui vicient si profondément les deux résultats précédents.

Mais cette espérance ne s'est pas trouvée justifiée par les résultats. Les sources d'erreurs personnelles ou physiologiques sont si délicates, qu'on ne saurait se flatter qu'elles se reproduisent identiquement, à moins de replacer l'observateur dans des conditions matériellement identiques. Or l'observation des bords de la Lune n'est pas identique à celle d'une étoile. En fait, on a constaté ainsi d'étranges différences constantes qui peuvent dépasser *un quart* de seconde d'un observateur à l'autre. En pareille matière, *un quart* de seconde produirait près de 8 secondes d'erreur sur la différence des longitudes qu'il s'agit de déterminer.

» *Conclusions.* D'après ces résultats, et leur comparaison avec la nouvelle détermination, on est en droit de conclure que toutes les longitudes déterminées antérieurement peuvent être en erreur d'une seconde ou même davantage, et que, par conséquent, elles ne sauraient servir de base aux calculs précis de l'astronomie lunaire, ni de contrôle pour les opérations de la haute géodésie. Il est essentiel de recommencer toutes les mesures de ce genre qui ont été faites en France, notamment sur le parallèle moyen : car les discordances qui se sont manifestées entre les mesures directes de longitude et les résultats des triangulations peuvent tenir aux erreurs systématiques des premières, tout autant ou même beaucoup plus qu'aux anomalies locales dont on a tant parlé. Le réseau télégraphique qui recouvre la France permettra d'étendre à notre territoire, sans grands frais et en peu d'années, le bénéfice de ces nouvelles opérations, qui sont appelées à donner une grande valeur scientifique aux travaux des officiers attachés à la Carte de France, c'est-à-dire à la plus vaste triangulation qui existe au monde. En opérant la jonction des observatoires étrangers, on comblera un *desideratum* astronomique, et surtout on réunira, comme en un vaste faisceau, toutes les triangulations européennes. Ces travaux se rattacheraient, d'ailleurs, à certains projets que les Anglais ont déjà réalisés en partie, chez eux, pour le plus grand avantage de la navigation et de la régularité du service des chemins de fer.

» C'est ainsi que les progrès des sciences pures entraînent d'autres progrès dans l'ordre des applications journalières et d'une utilité immédiate; progrès dont l'Observatoire de Paris provoquera sans relâche la réalisation la plus prochaine, et pour l'accomplissement desquels il osera réclamer, en temps et lieu, l'appui de l'Académie. »

ASTRONOMIE PHYSIQUE. — *Sur les réfractions atmosphériques;* *par* M. **Biot**.

« Dans la dernière séance de l'Académie, je me suis engagé à établir la proposition suivante :

» Remonter de la réfraction opérée entre des signaux terrestres, à la réfraction astronomique, par des résultats transportés de la première à la seconde, c'est un mode de réduction, qui, bien que théoriquement admissible au point de vue mathématique, conduirait à des conséquences vicieuses dans l'application.

» Une étude plus attentive du sujet m'a fait reconnaître que la première partie de cet énoncé renferme une concession beaucoup trop large. Lorsque la formule approximative qui donne la réfraction terrestre proportionnelle à l'angle au centre, a eu son coefficient de proportionnalité numériquement déterminé par des observations faites à de petites hauteurs, elle n'est plus assez générale pour qu'on puisse l'étendre, même comme hypothèse analytique, à toute la masse gazeuse de notre atmosphère, parce que la valeur particulière assignée ainsi à ce coefficient serait presque toujours autre que la stabilité de cette masse ne l'exige, dans l'état de stratification qu'on lui attribue. Cette impossibilité, dont on verra ci-après la preuve, rend mon dissentiment avec M. Faye encore plus complet que je ne l'avais témoigné d'abord.

» Ces dénominations, de réfraction terrestre et de réfraction astronomique, sont impropres. La première n'est que la petite partie de la seconde, qui s'opère dans les couches d'air les plus basses et les plus rapprochées de l'observateur, aux distances restreintes où des signaux érigés sur la surface convexe de la Terre peuvent lui être visibles. Concevez une trajectoire lumineuse, qui, partant d'une étoile, parvienne à son œil sous une certaine distance zénithale apparente, après avoir traversé toute l'atmosphère. La somme des déviations que le pouvoir réfringent des couches aériennes aura fait subir au rayon lumineux, dans le sens vertical, sur toute l'étendue de ce trajet, composera la réfraction astronomique, qui, ajoutée à la distance zénithale apparente, donnera la distance zénithale vraie, sous laquelle l'étoile aurait été vue directement à travers le vide. Maintenant supposez, que, dans le plan vertical qui contient cette trajectoire, on érige un signal vertical qui l'intercepte, et qui demeure seul visible pour l'observateur par la lumière propre qui en émanera. Ce signal devra être d'autant plus élevé au-dessus de la surface convexe de la Terre qu'il sera plus distant; et cette

condition de visibilité met des bornes très-restreintes à son éloignement, si on le compare à tout le reste de l'espace que la trajectoire lumineuse venue de l'étoile, a dû parcourir avant d'arriver au signal qui l'a interceptée. La faible portion de la réfraction totale qui se produit alors entre le signal et l'observateur, sur cette même trajectoire lumineuse idéalement continuée, constitue ce que l'on appelle la réfraction terrestre, pour les circonstances ici assignées à l'observation.

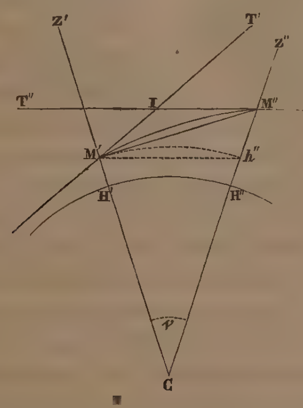
» Ces définitions étant établies, je me suis proposé de caractériser exactement les relations, tant mathématiques qu'expérimentales, qui existent entre ces deux parties du même phénomène. Les premières sont énoncées et fixées, dans le livre X de la *Mécanique céleste*, avec un détail et une rigueur de démonstration qui ne laissent rien à désirer. Je les ai tirées de là, en conservant scrupuleusement les mêmes notations symboliques avec lesquelles l'illustre auteur les a exprimées, et qui doivent être familières à tous ceux qui ont voulu étudier, après lui, ce problème, où il faut faire concourir des considérations de mécanique, de physique, d'astronomie, si délicates et si multipliées. Quant au complément de données expérimentales que le progrès du temps a permis d'ajouter à celles qu'il avait rassemblées, je les ai puisées, en grande partie, dans une longue pratique personnelle des divers genres d'observations qui s'y combinent. J'ai espéré pouvoir ainsi résumer utilement ce que la science nous fournit aujourd'hui de connaissances positives sur un sujet si important pour l'astronomie, sans y chercher le futile intérêt d'une polémique individuelle qui ne conviendrait ni à mon âge ni à mes goûts, mais en conservant toutefois l'entière liberté de discussion que l'indépendance académique autorise, et qui est indispensable pour séparer l'erreur de la vérité.

» N'ayant pas ici pour but de suivre les trajectoires lumineuses dans toute l'étendue de leur cours à travers l'atmosphère terrestre, mais seulement d'étudier par la théorie et par l'observation des portions de ces trajectoires comprises entre des rayons vecteurs qui ne sous-tendent au centre de la Terre qu'un angle très-restreint, presque toujours moindre que 1 degré, j'emprunte au chapitre II du livre X de la *Mécanique céleste* leur équation différentielle générale, mise sous la forme la plus appropriée à cette recherche, et qui est :

$$(1) \qquad d\theta = -\frac{2k\left(\frac{d\rho}{dr}\right)}{1+4k\rho}\cdot r dv;$$

r est le rayon vecteur mené du centre de la sphère terrestre à un point

quelconque de la trajectoire, où la densité de l'air est ρ, et $4k\rho$ son pouvoir réfringent, la vitesse de la lumière dans le vide étant 1. Le coefficient différentiel $\left(\frac{d\rho}{dr}\right)$ exprime donc la variation de la densité à cette hauteur entre deux couches d'air infiniment voisines; dv est l'élément de l'angle au centre compris entre deux rayons vecteurs infiniment voisins; et $d\theta$ est l'angle infiniment petit formé par les tangentes de la trajectoire, aux deux points extrêmes du petit arc que ces rayons vecteurs interceptent. La relation différentielle ainsi établie suppose que l'atmosphère considérée a une composition chimique uniforme, et que, dans la portion actuellement traversée par la trajectoire lumineuse, les couches d'égale densité sont concentriques à la région de la surface terrestre sur laquelle elles reposent; leur mode de répartition à diverses hauteurs pouvant d'ailleurs être quelconque. La même relation pourrait, avec une légère modification de symboles, être étendue à une atmosphère dont la composition chimique serait variable; mais je ne considère pas ici ce cas.



» Si l'on pouvait obtenir la somme des $d\theta$, qui se succèdent entre deux points de la trajectoire, situés à une distance finie l'un de l'autre, et que je désigne par M', M" dans la figure ci-jointe, cette somme ou intégrale θ représenterait l'angle aigu T"IM', ou T'IM", compris entre les tangentes menées à la trajectoire en ces deux points extrêmes M', M", dont les rayons vecteurs embrassent l'angle au centre v. Or, dans les limites d'application ici assignées, la valeur de θ peut être obtenue de deux manières : par la théorie, par l'observation.

» Pour suivre la première voie, il faut adapter l'équation différentielle

aux conditions d'application restreinte que nous voulons lui donner, lesquelles exigent que les rayons vecteurs menés aux points M′, M″ diffèrent très-peu l'un de l'autre dans les étroites limites que la convexité de la Terre apporte à la possibilité d'une visibilité réciproque. Désignant donc le premier de ces rayons par r_1, faisons généralement :

$$(2) \qquad \frac{r_1}{r} = 1 - s;$$

s sera une nouvelle variable qui restera toujours très-petite dans la portion restreinte de la trajectoire à laquelle notre application peut s'étendre. Par exemple, si la station M′ était située au niveau de la mer, et que M″ fût un signal élevé de 2400 mètres au-dessus de ce niveau, la plus grande valeur de s, sur la trajectoire lumineuse qui joindrait ces deux points, serait 0,000 376 849, et elle se réaliserait à ce signal même. Cet exemple justifie suffisamment le caractère de petitesse qu'on peut lui attribuer dans les applications plus restreintes.

» Introduisant donc cette variable s dans notre équation différentielle (1), elle devient :

$$(3) \qquad d\theta = -\frac{2k(1-s)\left(\frac{d\rho}{ds}\right)}{1+4k\rho} \cdot d\varphi.$$

Pour aller plus loin, il faudrait connaître la composition analytique de ρ et de $\left(\frac{d\rho}{ds}\right)$ en fonction de s, dans les couches d'air que traverse la portion de la trajectoire lumineuse comprise entre les deux stations M′, M″. Vouloir l'assigner à priori, ce serait se jeter dans les hypothèses. Mais, en examinant les circonstances dans lesquelles cette difficulté se produit, on va voir, qu'à l'aide de quelques déterminations expérimentales aujourd'hui très-faciles, on peut toujours l'éluder avec une approximation suffisante pour toutes les opérations pratiques, et dont j'apprécierai plus loin les limites d'erreur.

» Les portions de trajectoires lumineuses que nous avons ici à considérer, sont toujours comprises dans des couches d'air peu distantes de la surface terrestre. Or, les plus simples notions de physique font pressentir que la distribution des densités, et par suite des pouvoirs réfringents dans le sens vertical, y doit être extrêmement variable, et soumise à de continuelles fluctuations. L'expérience ne confirme que trop ces prévisions de la science. C'est ce que savent, ou doivent savoir, tous les observateurs qui ont exécuté de grandes opérations géodésiques, et qui se sont rendu compte de

leurs détails, par une pratique propre, non pas en les étudiant dans des livres, où l'on se complaît trop souvent à régulariser, par des moyennes, des résultats essentiellement irréguliers. Voyez combien Delambre, observateur toujours sincère, a rencontré de ces capricieux phénomènes dans la triangulation de la méridienne de France! Un air calme ou agité, un ciel couvert ou serein, parfois le seul passage d'un nuage qui venait voiler le soleil, faisaient varier les hauteurs apparentes de ses signaux, et les lui rendaient occasionnellement visibles et invisibles. Et ce n'est pas seulement pendant le jour que ces caprices s'observent. Nous en avons eu, Arago et moi, bien des exemples dans notre triangulation d'Espagne, qui a été faite tout entière sur des signaux de nuit, placés au sommet des plus hautes montagnes qui pussent les recevoir. J'en citerai un seul. C'était dans la nuit du 22 décembre 1806: nous étions à la station du Desierto de las Palmas, d'où nous observions le signal de Campvey, situé à 82557 toises de distance. Le temps était parfaitement calme depuis plusieurs jours; la température de l'air à notre station, 12 degrés centigrades. Sitôt après le coucher du soleil, dans le crépuscule, la lumière de Campvey se voyait distincte, unique, et bien terminée. Nous prîmes quatre fois l'angle de position entre elle et le signal de Mongo, sans rien remarquer d'extraordinaire. Mais ensuite, nous commençâmes à la voir accompagnée d'une seconde lumière située exactement dans la même verticale, à une distance que nous estimâmes au moins de trois minutes de degré. Bientôt il s'en forma trois, puis quatre, toujours dans le même vertical; tantôt se montrant toutes ensemble, tantôt s'éteignant isolément, pour reparaître après; l'une d'elles jusqu'à plus de cinq minutes de distance à la plus basse. Ce phénomène dura tant que la lumière de Campvey resta visible, et disparut avec elle dans les vapeurs, vers 11 heures du soir. Le lendemain le temps était encore calme, mais la mer était couverte au loin de masses de brouillard, arrondies, détachées les unes des autres, représentant des montagnes. Nous pensâmes que des courants d'air locaux avaient pu refroidir certaines parties de la surface de la mer, entre l'île d'Yviça, où était le signal, et la côte de Valence, où nous étions. Des perturbations analogues et beaucoup plus fortes doivent aisément et fréquemment se produire pendant le jour dans les couches d'air comprises entre deux stations peu élevées audessus du sol, comme celle que l'on emploie habituellement pour les petites triangulations.

» Ce serait, à mon avis, faire un mauvais usage de l'analyse mathématique que de vouloir assujettir à des formules rigoureuses et générales des phénomènes si capricieux. Mais, dans les opérations géodésiques

ordinaires, la minceur et le peu d'étendue de la masse d'air qui sépare deux signaux consécutifs, permet, le plus habituellement, de représenter son état réel, par des expressions approximatives, au moyen desquelles la quantité totale de la réfraction, opérée à travers cette masse, sur la portion de trajectoire lumineuse allant d'un signal à l'autre, peut être théoriquement calculée avec un degré de précision qui suffit aux besoins du praticien.

» Cela a lieu toutes les fois que les densités de l'air à diverses hauteurs varient dans l'épaisseur de cette masse, suivant une loi de décroissement ou d'accroissement continue, quelle qu'elle puisse être. C'est ce qui arrive en général dans les temps calmes, quand les circonstances météorologiques sont à peu près fixes. L'expérience, d'accord avec le raisonnement, montre qu'alors la variation des densités suit une marche très-lente; de sorte que leurs valeurs, même extrêmes, diffèrent peu entre elles, dans l'amplitude restreinte que l'intégrale θ doit embrasser. Admettant donc qu'un tel état existe actuellement, dans la mince épaisseur d'air parcourue par la trajectoire lumineuse, ou qu'il n'y soit que peu troublé, on voit que l'on aura déjà une valeur très-approchée de l'intégrale θ, en substituant, au coefficient variable de dv, un coefficient moyen et constant, formé avec les valeurs moyennes des quantités qui composent le coefficient théorique rigoureux. D'après cela, si l'on désigne par s_2 et ρ_2 les valeurs de s et de ρ à la station M″, comme elles sont o et ρ_1 à la station M′ que nous avons prise pour origine des s, la valeur cherchée de θ sera

$$(4) \qquad \theta = -k\,\frac{\left(1-\frac{1}{2}s_2\right)\left[\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_0+\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_2\right]}{1+2k(\rho_1+\rho_2)}\cdot v.$$

Nous apprécierons tout à l'heure les limites d'erreur de cette expression approximative, mais il faut d'abord définir les caractères physiques des éléments qui la composent.

» Les densités ρ_1 et ρ_2 s'obtiendront immédiatement par les observations du baromètre et du thermomètre, faites simultanément aux deux stations. Les coefficients différentiels $\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_0$, $\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_2$, représentent la variation virtuelle de la densité en chacun de ces points. On les obtiendrait par des observations météorologiques analogues, effectuées à de petites hauteurs, tant au-dessus qu'au-dessous de chacun d'eux, dans leurs verticales propres, comme je les ai obtenus pour les diverses stations de Gay-Lussac, dans son voyage aérostatique. A défaut de pareilles observations, on pourra, mais avec une approximation moins sûre, quoique très-souvent suffisante, sup-

poser ces coefficients différentiels égaux entre eux aux deux stations, et alors leur valeur commune s'obtiendrait par les observations météorologiques simultanées qu'on y aurait faites, puisque, à cause de la minceur de la couche d'air qui est censée les séparer, on pourrait prendre, pour cette valeur, le rapport $\frac{\rho_2 - \rho_1}{s_2}$, dans lequel s_2 se déterminerait par la formule barométrique, avec toute l'exactitude nécessaire. Cette égalité des deux coefficients deviendrait rigoureuse, si la variation des densités s'opérait en progression arithmétique avec les s, ce qui, dans les temps calmes, et pour de petites différences de hauteur, s'écarte habituellement très-peu de la réalité.

» Pour apprécier le degré d'approximation de cette formule, je me suis formé un type de comparaison exact, qui embrassât et dépassât toutes les amplitudes d'angle au centre, non-seulement admises, mais physiquement admissibles, dans les opérations géodésiques. Prenant comme exemple, l'état des couches inférieures de l'atmosphère, qui s'est réalisé dans l'ascension de Gay-Lussac, j'ai supposé que, dans ces circonstances, un astronome placé à l'Observatoire de Paris eût dans son méridien un signal dont la verticale fît avec la sienne un angle au centre de 1° 30'; et qu'à cette distance, plus grande que le plus grand côté de nos triangles d'Espagne, ce signal lui fût visible à la distance zénithale apparente de 90 degrés, c'est-à-dire dans l'horizon même. Comme seconde épreuve, j'ai réduit l'angle au centre à 30 minutes, ce qui rentre dans les conditions ordinaires des opérations géodésiques. Alors, pour chacun de ces cas, j'ai calculé rigoureusement toutes les particularités de la trajectoire lumineuse, qui, partant des deux signaux, arrivait à l'observateur sous la distance zénithale apparente convenue de 90 degrés. La même analyse m'a donné, avec une égale rigueur, les hauteurs verticales relatives des deux signaux, qui satisfaisaient aux conditions de visibilité supposées; et, de ces calculs bien vérifiés, j'ai déduit les deux tableaux suivants, auxquels j'ai comparé les résultats de l'expression approximative, lesquels ne s'en écartent que dans d'étroites limites d'erreurs, que les praticiens peuvent négliger; et pour l'angle au centre de 30 minutes, ces erreurs deviennent tout à fait insensibles.

Tableau A.

Angle au centre.. $\nu = 1^\circ 30'$.
Hauteur de la station M″ au-dessus du niveau sphérique de la station M′..... $r_2 - r_1 = 1846^m,060$.

STATION INFÉRIEURE M′.			STATION SUPÉRIEURE M″.			SOMME des deux réfractions locales.	DIFFÉRENCE des deux réfractions locales.
DISTANCE zénithale apparente de M″, vu de M′.	DISTANCE zénithale vraie de M″, vu de M′.	RÉFRACTION locale en M′.	DISTANCE zénithale apparente de M′, vu de M″.	DISTANCE zénithale vraie de M′, vu de M″.	RÉFRACTION locale en M″.		
z_1	$z_1 + \delta_1$	δ_1	z_2	$z_2 + \delta_2$	δ_2	$\delta_1 + \delta_2$	$\delta_1 - \delta_2$
90°	90° 6′ 55″,89	+ 6′ 55″,89	91°16′27″,90	91° 23′ 4″,11	+ 6′ 36″,21	+ 13′ 32″,10	+ 19″,68

» Coefficient de la réfraction terrestre conclu de ces nombres :

$$\theta = 0,1503889 . \nu.$$

» Résultats analogues déduits de la formule approximative, en évaluant les coefficients différentiels $\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_1$, $\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_2$, par la parabole la plus basse conclue de l'ascension de Gay-Lussac :

$\theta = 0,1473852\,\nu$; $\delta_1 + \delta_2 = 13' 15'' 56'''$. Erreur de l'approximation : $-16'',544$.

Tableau B.

Angle au centre.. $\nu = 0^\circ,30$.
Hauteur de la station M″ au-dessus du niveau sphérique de la station M′... $r_2 - r_1 = 204^m,313$.

STATION INFÉRIEURE M′.			STATION SUPÉRIEURE M″.			SOMME des deux réfractions locales.	DIFFÉRENCE des deux réfractions locales.
DISTANCE zénithale apparente de M″, vu de M′.	DISTANCE zénithale vraie de M″, vu de M′.	RÉFRACTION locale en M′.	DISTANCE zénithale apparente de M′, vu de M″.	DISTANCE zénithale vraie de M′, vu de M″.	RÉFRACTION locale en M″.		
z_1	$z_1 + \delta_1$	δ_1	z_2	$z_2 + \delta_1$	δ_2	$\delta_1 + \delta_2$	$\delta_1 - \delta_2$
90°	90° 2′ 21″,46	+ 2′ 21″,46	90°25′17″,746	90° 27′ 38″,454	+ 2′ 21″,798	+ 4′ 42″,254	+ 0″,658

» Coefficient de la réfraction terrestre conclu de ces nombres :

$$\theta = 0,156807 . \nu.$$

» Résultats analogues déduits de la formule approximative, en évaluant les coefficients différentiels $\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_1$, $\left(\frac{d\rho}{ds}\right)_2$ par la parabole la plus basse conclue de l'ascension de Gay-Lussac :

$\theta = 0,156446\,\nu$; $\delta_1 + \delta_2 = +4' 41'',604$. Erreur de l'approximation : $-0'',650$.

» Tous les calculs sur lesquels ces résultats sont fondés, se trouvent rapportés en détail dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour l'année 1842 (*).

(*) Je profite de cette circonstance pour indiquer une faute d'impression qui existe à la page 54 du Mémoire auquel je renvoie. Elle porte sur l'expression approximative de θ, qui est écrit avec le signe $-$, au lieu du signe $+$. On lui a donné en outre pour facteur $\frac{r_1 + r_2}{r_1}$, tandis qu'il faut $\frac{r_1 + r_2}{r_2}$. Ces fautes n'existaient point dans le manuscrit, et tous les calculs qui suivent ce passage du Mémoire ont été effectués sur la formule exacte. Elle a été reproduite et employée sous sa forme correcte, dans les Notes du tome Ier de mon *Traité d'Astronomie*, pages 262 et suivantes.

» Connaissant, par cette étude préliminaire, les caractères géométriques des portions de trajectoires lumineuses qui ont pu se former entre des signaux terrestres situés à diverses distances, dans un état régulier des couches inférieures de l'atmosphère, qui a effectivement existé, cherchons quels sont ceux de ces caractères que l'on pourra constater et apprécier par des observations de distances zénithales, effectuées aux deux stations qui les terminent.

» Si deux observateurs placés en ces points extrêmes prennent *simultanément* les distances apparentes Z_1, Z_2 de l'autre signal, séparé d'eux par l'angle au centre ν, la considération du quadrilatère plan CM'IM'', dont les angles internes doivent former en somme quatre angles droits, leur donnera immédiatement l'angle intérieur T''IM' ou θ, lequel aura pour expression :

$$(5) \qquad \theta = 180^\circ + \nu - (Z_1 + Z_2).$$

» Mais cette relation ne s'appliquera à une même trajectoire lumineuse que sous la condition rigoureuse que les distances zénithales réciproques auront été observées simultanément. Car si elles étaient seulement réciproques sans être simultanées, elles appartiendraient généralement aux tangentes extrêmes de deux trajectoires différentes; et la valeur de θ, fournie par la même relation, exprimerait l'angle formé par ces tangentes, qui n'auraient entre elles aucune connexité physique dont on pût se prévaloir.

» La valeur de θ obtenue ainsi par des observations, même simultanées, représente seulement la somme $\delta_1 + \delta_2$ des deux réfractions locales qui ont eu lieu à un même instant, aux deux extrémités d'une même trajectoire. Mais cette donnée est insuffisante pour que l'on puisse en conclure la différence de niveau des deux stations, ce qui est l'usage spécial auquel ce genre d'observations s'emploie dans les opérations géodésiques. Il devient alors nécessaire de connaître aussi la différence $\delta_1 - \delta_2$ des deux réfractions locales, afin d'avoir chacune d'elles individuellement. On y supplée en les supposant égales, ce que nos tableaux A et B montrent devoir être peu en erreur, aux distances restreintes où la convexité de la Terre oblige de placer les signaux géodésiques. Cela revient à considérer comme circulaire la portion de la trajectoire lumineuse, qui est comprise entre eux. Mais cette hypothèse, suffisante pour la pratique de l'ingénieur, n'est pas théoriquement acceptable comme réalité.

» Ayant ainsi constaté l'excessive variabilité physique du coefficient

de dv, dans l'expression différentielle

$$(1) \qquad d\theta = -\frac{2k(1-s)\left(\frac{d\rho}{ds}\right)}{1+4k\rho}\cdot dv,$$

lorsqu'on l'applique à des couches d'air minces, peu étendues, et peu élevées au-dessus de la surface terrestre, comme sont toujours celles qui se trouvent comprises entre deux signaux géodésiques, supposons que, par des observations de distances zénithales réciproques et simultanées, faites entre deux signaux pareils, on ait, à un certain jour, à un certain instant, déterminé sa valeur actuelle, sur la ligne d'air suivie par la trajectoire lumineuse qui va de l'un à l'autre, et qu'on l'ait trouvée égale à $\frac{1}{2m}$, m étant un nombre connu. On n'en pourra nullement conclure qu'il aurait encore cette même valeur, à ce même instant, sur les trajectoires lumineuses qui parcourraient des portions de la même masse d'air, comprises entre des signaux moins ou plus distants; et nos tableaux A et B offrent des exemples du contraire. Toutefois, admettons hypothétiquement qu'il en soit ainsi. Alors, tous les éléments de l'intégrale θ, se trouvant constants, et égaux à $\frac{1}{2m}dv$ entre les limites d'amplitude qu'elle doit embrasser, on en conclura immédiatement, dans ces limites,

$$\theta = \frac{1}{2m}v.$$

Alors $\frac{1}{2m}$ sera ce que l'on appelle le *coefficient de la réfraction terrestre*, dans les circonstances supposées; et il est à remarquer qu'il sera essentiellement propre et spécial à ces circonstances.

» Concevons maintenant que l'on demande quel mode de variation des densités il faudrait idéalement établir dans la masse d'air considérée, pour que le coefficient de dv eût précisément cette valeur constante $\frac{1}{2m}$, dans l'amplitude d'épaisseur et d'étendue qu'elle embrasse? La condition à remplir s'exprimera en posant l'égalité :

$$\frac{-2k(1-s)\left(\frac{d\rho}{ds}\right)}{1+4k\rho} = \frac{1}{2m}; \quad \text{d'où l'on tire} \quad \frac{d\rho}{1+4k\rho} = -\frac{1}{2m}\cdot\frac{ds}{1-s}.$$

Sous cette seconde forme, l'intégrale se présente immédiatement, et elle est

$$1+4k\rho = A(1-s)^{\frac{1}{m}},$$

A étant une constante arbitraire. Cette constante se détermine par la condition que la densité ρ, ait sa valeur vraie et observable ρ_1, à la surface de la couche d'air d'où l'on compte les variables s. Pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'on ait :

$$1 + 4k\rho_1 = A,$$

ce qui donne, après l'élimination de A,

$$\frac{1+4k\rho}{1+4k\rho_1} = (1-s)^{\frac{1}{m}}, \quad \text{et, par suite,} \quad \left(\frac{1+4k\rho}{1+4k\rho_1}\right)^m = 1 - s,$$

ou, en remplaçant $1 - s$ par son expression équivalente $\frac{r_1}{r}$,

$$(6) \qquad \left(\frac{1+4k\rho}{1+4k\rho_1}\right)^m = \frac{r_1}{r}.$$

» Si l'on a bien suivi les détails de cette déduction analytique, on doit reconnaître avec évidence que la formule (6), à laquelle nous venons de parvenir, n'est légitimement applicable qu'à la masse restreinte d'air où l'on a déterminé par observation le coefficient m; et même, qu'elle ne s'étend à tous ses points intérieurs, qu'au moyen de la généralisation hypothétique sur laquelle l'intégration est fondée. Or, non-seulement M. Faye lui attribue virtuellement ce caractère d'application local, mais, par une extension d'idées bien autrement hypothétique, et, je l'ose dire, contraire à toutes les notions de la physique, tant rationnelle qu'expérimentale, il en fait le type d'une loi de variation des densités, qui doit matériellement s'établir depuis la surface de la Terre jusqu'aux dernières régions de l'atmosphère, en conformité avec la valeur actuelle, que l'observation locale aurait donnée au coefficient m !

» Avant de revenir sur cette idée, je ferai remarquer que notre équation (6) est, dans sa composition analytique, et jusque dans sa notation littérale, identique à celle que Laplace donne au § 6 du livre X de la *Mécanique céleste,* comme une hypothèse mathématique dans laquelle l'équation différentielle de la réfraction devient rigoureusement intégrable, et conduit à la même expression que la loi de Bradley. Mais, pour que ce mode de décroissement des densités, ou tout autre que l'on voudrait imaginer, puisse, même hypothétiquement, être appliqué à une atmosphère gazeuse, composée de couches pesantes et compressibles, il faut d'abord l'assujettir à une équation de condition, qui est toujours nécessaire pour assurer sa stabilité, dans un tel état; puis, si l'on veut qu'elle représente réellement l'atmosphère terrestre, il faudra disposer des constantes qui la définissent, de

manière qu'elle s'y assimile dans ses particularités physiques; c'est-à-dire que les réfractions à toutes les distances zénithales y soient de même grandeur, et que le décroissement des températures à diverses hauteurs y soit tel qu'on le constate dans notre atmosphère par l'observation. Or, la constitution d'atmosphère représentée par l'équation (6), ne contenant de disponible que la seule constante m, ce serait un singulier hasard qu'elle pût satisfaire à toutes ces conditions d'identité. Effectivement, la relation nécessaire à la stabilité de la masse gazeuse, détermine à elle seule immédiatement cette constante; et, à la température de 0 degré, sous la pression de $0^{m},76$, elle lui assigne pour valeur numérique :

$$m = 4,25970; \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{2m} = 0,11738;$$

$\frac{1}{2m}$ est le coefficient de la réfraction terrestre, qui se trouve ainsi notablement moindre que l'observation ne le donne, en moyenne, dans notre atmosphère. m étant ainsi déterminé, il en résulte pour la grandeur de la réfraction horizontale, à 0 degré de température, et sous la pression totale de $0^{m},76$,

$$30' \, 24'',12,$$

valeur pareillement beaucoup trop faible, comme moyenne. Enfin le décroissement moyen des températures, près de la surface terrestre, conclu de ce même m, dans les mêmes circonstances météorologiques, serait de 1 degré centigrade pour $63^{m},8$ d'accroissement de hauteur, progression environ trois fois plus rapide qu'on ne l'observe réellement.

» Tous ces résultats ont été établis par Laplace au § 6 du livre X de la *Mécanique céleste*, comme autant de conséquences mathématiquement inhérentes à la constitution d'atmosphère représentée par notre équation (6). Je n'ai fait que lui emprunter ses nombres, et je les ai rapportés avec tout ce détail, pour montrer que la valeur occasionnelle du coefficient m, déterminée par des observations géodésiques faites à travers des couches d'air d'une épaisseur restreinte, et à de petites hauteurs, ne peut pas, sans contradiction mathématique, être employée dans l'équation (6), comme caractérisant un mode de variation des densités applicable à toute hauteur dans notre atmosphère. Car une atmosphère ainsi constituée artificiellement, non-seulement n'aurait pas les qualités physiques de la nôtre, mais ne satisferait pas même à la condition de stabilité nécessaire à son existence.

» Voilà pourtant ce que M. Faye fait, ou prétend faire. Car il demande qu'on emploie les réfractions calculées dans cette atmosphère fictive, pour

corriger les irrégularités de celles que l'atmosphère réelle nous présente habituellement, près de l'horizon. Or ces irrégularités ne peuvent être assujetties à aucune théorie générale, parce qu'elles résultent de perturbations opérées dans les couches basses et lointaines de notre atmosphère, par des accidents météorologiques locaux, dont les caprices échappent à toute prévision, et se réalisent même soudainement à notre insu. On ne saurait se débarrasser de leurs effets que par compensation; et le procédé que M. Faye propose pour y remédier ne ferait que vicier les résultats moyens qui peuvent être obtenus à la longue.

» Supposons, dit M. Faye, qu'une mire éloignée, visible de jour et de nuit, soit placée dans la direction du méridien de l'observateur à une grande hauteur au-dessus du sol, et que l'on ait déterminé sa distance ainsi que son altitude relative, à l'aide d'un nivellement ordinaire à petites portées. On en déduira la distance zénithale vraie de cette mire. L'observation donnera la distance zénithale apparente. La différence sera l'effet de la réfraction (locale); et, comme on connaît l'angle au centre, on aura la valeur actuelle du coefficient de la réfraction terrestre (sur la portion de la trajectoire lumineuse propagée du signal à l'observateur). Ce coefficient, introduit dans l'équation (6) de Laplace, donnera la réfraction astronomique actuelle, sous la forme que lui assigne la loi de Bradley, dont tous les éléments se trouveront ainsi déterminés pour l'application.

» J'ai présenté ici l'esprit de la méthode aussi fidèlement que j'ai pu le saisir dans la nouvelle notation que M. Faye a substituée à celle de Laplace. Je regrette, pour mon compte, ces changements de formes symboliques, qui rendent plus pénibles à lire, à retrouver, des théories déjà exposées avec un entier développement, dans des ouvrages célèbres, que tout le monde a étudiés.

» Je ne reviendrai pas sur la difficulté mécanique, toute grave qu'elle est. Je veux considérer ici la méthode, uniquement au point de vue de l'application physique et astronomique. Elle se résume, pour moi, en ce point : que, d'après la quantité de la réfraction observée à l'une des extrémités d'un petit arc de trajectoire lumineuse, réfraction qui n'excédera jamais quelques minutes de degré, M. Faye veut conclure la totalité de la réfraction qui se produira pour des distances zénithales de même ordre, sur toute la longueur des trajectoires lumineuses, qui se seront propagées depuis les extrémités de l'atmosphère jusqu'à l'observateur, en traversant des régions aériennes immensément distantes, dont la stratification pourra n'avoir aucun rapport avec l'état actuel de la même couche d'air comprise

entre l'observateur et le signal observé. Croire que l'état accidentel de celle-ci pourra, devra, se propager ainsi, instantanément, à tout le reste de la masse aérienne, c'est une concession que la vieille physique, je dirai aussi la vieille logique de mon temps, ne me permet pas de faire, et pourtant elle semble indispensable pour que l'application ait lieu. Mais alors, si le même observateur établissait autour de sa station trois ou quatre signaux terrestres, sur diverses directions azimutales, au nord, au sud, à l'est, à l'ouest, comme les couches basses qui les sépareraient de lui pourraient se trouver, au même instant, dans des états physiques très-dissemblables, il faudrait donc que l'atmosphère réelle se conformât simultanément à tous ces états divers, ce qui ne me paraît pas moins dur à concevoir.

» Tels sont les motifs du dissentiment que j'ai témoigné, lorsque ce nouveau moyen de corriger les irrégularités des réfractions atmosphériques, a été annoncé à l'Académie. M. Faye a comparé ma résistance à celle que Flamsteed opposait aux conseils de Newton, quand il voulait lui persuader de joindre à ses observations astronomiques, les indications du baromètre et du thermomètre. Cette comparaison me semble pécher, au moins dans l'un de ses termes. Mais, peut-être, M. Faye n'a pas entendu l'appliquer à lui et à moi, dans toute sa rigueur.

» Je pense qu'il reste beaucoup de perfectionnements à faire dans l'appréciation des réfractions atmosphériques; mais il faut, je crois, les chercher par une autre voie. C'est ce que j'essayerai de montrer dans la séance prochaine, ou dans celle qui suivra. »

A la suite de cette discussion, M. **Laugier** prend la parole en ces termes :

« M. Le Verrier, en répondant à M. Biot, ayant déclaré que les objections que j'avais présentées dans la dernière séance contre la formule de M. Faye n'étaient nullement fondées, je demande à l'Académie la permission d'ajouter à ce que j'ai dit quelques nouvelles observations.

» Les conclusions de la Note que j'ai lue dans la dernière séance, sont :

« La formule proposée par M. Faye n'a pas, comme la formule de
» Bradley, l'avantage de pouvoir servir de formule approchée : elle ne sau-
» rait, dans aucun cas, expliquer les incertitudes des réfractions qui ont lieu
» à de petites hauteurs. »

» Je maintiens aujourd'hui ces mêmes conclusions.

» La formule de M. Faye, quand on l'applique au calcul des réfractions avec la nouvelle modification qu'il apporte au coefficient de ρ, est une formule inexacte, et non une formule approchée; car il la déduit d'une équa-

tion qui n'a jamais été considérée comme rigoureuse, et il lui est impossible de prévoir l'influence que peuvent avoir, sur les résultats numériques, les quantités qu'il omet.

» M. Faye affirme aujourd'hui qu'il n'a pas eu la prétention de donner une formule rigoureuse; mais, après la lecture des Notes qu'il a publiées dans les *Comptes rendus*, tout nous autorise à penser le contraire. Je rapporte entre autres les passages suivants qui me paraissent en contradiction avec ce qu'il avance maintenant.

« 1°. Page 382.... Je vais déduire cette loi (de la constitution de l'atmo-
» sphère) des données admises universellement pour la réfraction terrestre,
» et calculer les réfractions astronomiques dans cette hypothèse; nous
» aurons ainsi l'avantage de voir clair dans une analyse simplifiée où nous
» ne serons pas forcés de *rien* négliger....

» 2°. Page 388.... J'espère que la très-simple correction proposée ayant
» pour argument le coefficient actuel de la réfraction géodésique suffira
» pour *mettre d'accord désormais* la théorie et l'observation.

» 3°. Page 482.... A cette assertion pure et simple je pourrais répondre
» que mon Mémoire fait connaître des ressources nouvelles et que la ques-
» tion a changé de face....

» 4°. Page 482.... Mon Mémoire a l'avantage de répondre nettement à
» ces questions. Il montre que les variations de l'atmosphère se font sentir,
» non pas à 70 degrés, mais à 45 degrés si l'on veut tenir compte des frac-
» tions de seconde, et à 65 degrés à moins de négliger 3 secondes.

» 5°. Page 486.... Je me borne à renvoyer sur ce point à mon Mémoire :
» on y verra si le jeu de ces fluctuations négligées est insignifiant et s'il est
» réellement impossible, comme on l'a cru jusqu'ici, de les *soumettre par*
» *l'analyse à un système de corrections régulières, etc., etc.* »

» Ces passages ne peuvent laisser dans l'esprit le moindre doute sur l'opinion que M. Faye a de son travail.

» D'ailleurs, comment M. Faye démontre-t-il l'importance, au point de vue de la pratique, de la modification qu'il propose? C'est en calculant, à l'aide de sa formule, l'influence de la réfraction terrestre sur les réfractions astronomiques qui ont lieu à 45 degrés et à 75 degrés. Eh bien, je ne fais que suivre en cela l'exemple de M. Faye : je prends sa formule, j'y introduis, comme lui, certaines valeurs du coefficient de la réfraction terrestre données par l'observation, et je fais voir numériquement à quelles conséquences inacceptables on est entraîné.

» Si la formule de M. Faye lui permet de mettre en évidence les fluctua-

tions atmosphériques qui dépendent des variations du coefficient de la réfraction terrestre, on m'accordera sans doute que je puis aussi, par des applications semblables, lui faire accuser ses propres imperfections.

» J'aborde maintenant un autre ordre d'idées.

» Les valeurs moyennes du coefficient de la réfraction terrestre trouvées en différents pays par MM. Struve, Coraboeuf, le général Baeyer et nos officiers d'état-major, s'accordent d'une manière très-remarquable. Par conséquent, d'après M. Faye, on n'aura pas à craindre, autant qu'on parait le croire, des effets de ses variations.

» Que l'Académie veuille bien le remarquer, cet accord ne prouve qu'une chose, c'est que, si l'on choisit le moment de la journée où les réfractions terrestres varient le moins, si l'on a soin d'exclure de la discussion les valeurs par trop extrêmes, on peut trouver en différents pays des résultats moyens très-concordants. Mais cet accord ne prouve pas que les variations observées dans la valeur de ce coefficient ne soient pas de nature, si on les introduisait dans le calcul des réfractions, à vicier les indications moyennes de nos Tables.

» Ouvrons n'importe quel livre qui traite des réfractions terrestres, et nous y lisons presque partout le mot discordance à côté des résultats déduits de l'observation. Le tome IX du *Mémorial du Dépôt de la Guerre* nous en fournit de nombreux exemples : Delambre trouve deux valeurs négatives pour le coefficient de la réfraction terrestre, et un certain nombre de valeurs sont comprises entre 0,10 et 0,30.

» Les observations des officiers d'état-major présentent également de très-grands écarts : le coefficient de la réfraction terrestre y varie de 0,02 à 0,29. Dans une série résultant d'observations faites pendant la nuit, la plus petite valeur est 0,09 et la plus grande 0,20; et l'on peut voir, d'après ces chiffres, si j'exagérais l'étendue des variations de la réfraction terrestre qui surviennent pendant la nuit en la portant à 0,01 (1).

» Dans l'Inde, le colonel Everest a fait un nivellement au moyen d'observations simultanées qui présentent quelques coefficients très-forts compris entre 0,11 et 0,44; d'autres, au contraire, sont très-faibles, et, parmi ces derniers, on remarque un coefficient négatif de 0,02.

---

(1) Lorsque le coefficient de la réfraction terrestre varie de 0,02 à 0,15, la réfraction moyenne à 80 degrés varie de 30 secondes! On m'accordera peut-être cette fois que cette variation de 30 secondes dépasse de beaucoup les erreurs possibles des réfractions qui ont lieu à 80 degrés distance zénithale.

» Enfin, en Angleterre, les travaux géodésiques exécutés jusqu'en 1806 donnent pour valeurs extrêmes du coefficient de la réfraction terrestre, 0,17, 0,20, 0,30, 0,50 et 0,00, 0,03, 0,04, etc.

» Les nombres que je viens de citer justifient donc amplement cette opinion généralement admise, que les réfractions qui affectent les distances zénithales des signaux géodésiques, sont soumises à d'énormes perturbations locales. On peut, en géodésie, s'en affranchir jusqu'à un certain point : d'abord par les distances réciproques et simultanées, ensuite en choisissant le moment propice pour faire l'observation, enfin en revenant plusieurs fois dans les mêmes stations. Mais l'astronome qui ne peut choisir ni les jours d'observation, ni les heures de la journée, sera bien obligé de prendre pour coefficient actuel de la réfraction terrestre le nombre résultant des observations qu'il aura faites au commencement et à la fin de sa série, et, dès lors, il se trouvera exposé à toutes les irrégularités, à tous les accidents que je viens de signaler. C'est pour lui surtout que les réfractions terrestres seront éminemment variables, comme le disait M. Faye au commencement de sa première Note, page 382. Il était dans le vrai alors, et cette remarque qu'il faisait aurait dû, ce me semble, l'arrêter dans ses conclusions. Qu'on ne vienne pas objecter que ces variations considérables arrivent à des intervalles de temps plus ou moins éloignés ; il suffit qu'elles aient lieu pour que leur influence tout entière se fasse sentir dans des observations astronomiques qui, pour être faites à un jour ou à six mois de distance, n'en sont pas moins susceptibles d'être comparées, étant ramenées par le calcul au même instant.

» Telles sont les réflexions que je désirais ajouter à ce que j'ai dit dans ma dernière Note.

» L'idée d'emprunter au coefficient de la réfraction terrestre un élément de correction pour les réfractions astronomiques, est sans doute venue à l'esprit de plusieurs personnes. Je l'ai rencontrée dans un ouvrage publié récemment, et l'on sera bien étonné d'apprendre que cet ouvrage est précisément le tome IX du *Mémorial du Dépôt de la Guerre*, si souvent cité par M. Faye dans cette discussion. Je lis en effet, page 454, dans le chapitre même où se trouvent exposées les observations faites par M. Hossard pour déterminer les variations diurnes de la réfraction terrestre, le passage suivant :

« On peut remarquer, ainsi que l'indique d'ailleurs la formule des ré-
» fractions terrestres, que l'état du baromètre et du thermomètre n'est pas
» l'élément qui exerce la plus grande influence sur la valeur du coefficient

» de la réfraction, mais bien la rapidité du décroissement de la température dans les couches inférieures de l'atmosphère. Ce dernier élément » étant difficile à déterminer à priori, ne pourrait-on pas renverser la question et le déduire d'observations directes du coefficient de la réfraction » terrestre, auxquelles on aurait fait subir quelques corrections dues aux » indications du baromètre et du thermomètre? On obtiendrait ainsi une » nouvelle donnée météorologique qui ne serait peut-être pas sans importance, et qui, d'ailleurs, serait de nature à jeter un nouveau jour sur des » formules de réfraction terrestre et astronomique.

» L'instrument propre à effectuer ce genre d'observations pourrait se réduire à une forte lunette invariablement fixée à un massif en pierre dans » un observatoire, et munie d'un micromètre au moyen duquel on mesurerait, à des heures déterminées de la journée, la distance angulaire entre » un objet situé à 20 000 mètres de distance au moins, et l'axe optique d'un » collimateur, ou mieux encore une mire invariable placée comme repère » à 1 kilomètre de distance environ. Ces conditions seraient probablement » réalisables dans un grand nombre d'observatoires. »

» Cette idée est exactement celle que M. Faye expose et développe dans les différentes Notes qu'il a présentées à l'Académie, et après la lecture de ce passage si net et si précis, on ne comprend pas comment il a cru pouvoir se dispenser de citer M Hossard au commencement du Mémoire qu'il a lu dans la séance du 28 août; on s'explique encore moins la phrase suivante que j'extrais textuellement de la deuxième Note de M. Faye, page 485 :

« Quant à la région où, d'après M. Biot, les incertitudes de la réfraction » terrestre commencent à se faire sentir sur une partie de la trajectoire » lumineuse, il me semble que là le coefficient de la réfraction terrestre se » trouve tout naturellement appelé ici à jouer un rôle : *je m'étonnerais* » *plutôt qu'on n'y eût point songé déjà, si la critique même de M. Biot ne* » *me rassurait à cet égard.* »

» Plus tard, il est vrai (séance du 18 septembre), page 520, M. Faye, dans une phrase placée en note, dit :

« Ici je me suis servi des recherches si remarquables de M. le colonel » Hossard; j'aurais pu, ou même j'aurais dû invoquer l'opinion formellement exprimée à laquelle ses recherches l'ont conduit sur l'utilité de ce » genre de mesures en supposant qu'on veuille les appliquer à l'étude de la » constitution de l'atmosphere et de ses réfractions. »

» Mais personne assurément ne s'avisera de voir dans cette dernière

Note, la déclaration formelle que l'idée qui sert de base au Mémoire de M. Faye appartient tout entière à M. Hossard. Je ne crois pas m'être trompé en pensant qu'une question de priorité était, avant tout, une question scientifique, et c'est pour cela que je n'ai pas hésité à citer cet extrait du tome IX du *Mémorial du Dépôt de la Guerre*.

» Au reste, dans cet ouvrage, M. le colonel Hossard présente son idée avec une sage réserve. Pour lui, le coefficient de la réfraction terrestre est une nouvelle donnée météorologique qui ne sera peut-être pas sans importance, et qui, d'ailleurs, serait de nature à jeter un nouveau jour sur les formules de réfractions terrestres et astronomiques.

» Je n'ai pas besoin de dire que mes critiques ne s'adressent pas à une proposition formulée de cette manière. »

Réplique de M. Faye.

« Ce n'est pas à M. Biot que je me propose de répondre en ce moment. Je crois qu'il est de mon devoir d'attendre avec déférence les développements nouveaux que l'illustre savant a promis de donner à ses propres recherches sur la théorie des réfractions. Je m'en réfère d'ailleurs, sur tous les points, aux lumineuses explications que M. Le Verrier vient de donner à l'Académie. Quant aux critiques de MM. Mathieu et Laugier, insérées dans les derniers *Comptes rendus*, je me bornerai à lire la Note que j'ai préparée hier; mais, auparavant, je demande la permission de repousser une accusation que M. Laugier vient de produire avec un certain éclat.

» M. Laugier m'accuse d'avoir présenté comme neuves et comme miennes (tout en les gâtant, dit-il) des idées que M. Hossard ou M. Peytier ont publiées cette année dans le tome IX du *Mémorial du Dépôt de la Guerre*. Bien loin d'avoir tenté d'enlever à ces savants officiers le mérite de leurs travaux, je les ai cités moi-même à plusieurs reprises, dans mon premier Mémoire, pages 383, 384 et 385, avec les éloges dont ils sont dignes, et j'ai plusieurs fois appelé, verbalement, avec insistance, l'attention de l'Académie de ce côté. Il y a plus : M. Laugier a pu lire, dans les *Comptes rendus* de la dernière séance, p. 520, le passage suivant :

« Ici je me suis servi (il s'agissait d'une discussion verbale) des recher-
» ches si remarquables de M. le colonel Hossard; j'aurais pu, ou même
» j'aurais dû invoquer l'opinion formellement exprimée à laquelle ses
» recherches l'ont conduit sur l'utilité de ce genre de mesures, en suppo-

» sant qu'on veuille les appliquer à l'étude de la constitution de l'atmo-
» sphère et de ses réfractions. »

» C'est bien certainement cette citation qui a fait connaître à M. Laugier les idées de M. Hossard et de M. Peytier, et qui lui a signalé leur analogie avec les miennes : comment donc a-t-il pu supposer que j'aie voulu m'en approprier le mérite?

» Quant au droit que j'ai de considérer comme miennes les idées exposées dans mon Mémoire, il me serait bien facile de l'établir, s'il était sérieusement contesté, car je me suis publiquement occupé de ces sujets dans le sens que j'y attache encore aujourd'hui, longtemps avant que le tome IX du *Mémorial* ait paru, et j'en montrerais au besoin la preuve dans des feuilles lithographiées, authentiques, qui datent de 1852 ou même de 1851. »

ASTRONOMIE. — *Réponse de* M. **Faye** *aux critiques de* MM. Laugier *et* Mathieu.

« Les objections que MM. Mathieu et Laugier m'ont faites me semblent être basées sur certaines méprises auxquelles je regrette d'avoir pu donner lieu, malgré le soin que je croyais avoir mis à les éviter.

» La première critique consiste à dire que ma formule ne représente pas exactement les réfractions près de l'horizon. L'objection serait valable si j'avais présenté cette formule comme définitive; mais on se rappellera que je n'ai jamais eu cette prétention : je l'ai simplement proposée comme un texte commode pour l'étude et la discussion des phénomènes observés. Cependant il est bon, même sous ce point de vue qui est le mien, de montrer à l'Académie que cette formule

$$\rho = 60'',712 \tan g(z_1 - 3,26\rho),$$

dont aucun coefficient n'a été emprunté à l'observation des phénomènes qu'il s'agit de représenter, n'est pas aussi infidèle qu'on le suppose. Voici le tableau de ses valeurs :

DISTANCES ZÉNITHALES apparentes.	RÉFRACTIONS de Laplace.	RÉFRACTIONS suivant la formule.	DIFFÉRENCES.
0°	0″	0″	0″
10	10,7	10,7	0
20	22,0	22,0	0
30	35,0	35,0	0
40	50,8	50,9	+ 0,1
50	1′ 12,1	1′ 12,2	0,1
60	1.44,6	1.44,8	0,2
70	2.45,1	2.45,4	0,3
75	2.42,7	2.43,4	0,7
80	5.32,3	5.34,0	1,7
81	6. 7	6. 9	2
82	6.50	6.52	2
83	7.43	7.46	3
84	8.50	8.54	4
85	10.18	10.23	5
86	12.16	12.23	7
87	15. 2	15. 9	+ 7
88	19. 6	19. 5	— 1
89	25.19	24.44	— 35
90	35. 6	32.40	— 2′ 26″

» Les fortes discordances ne se manifestent qu'à partir de 89 degrés, c'est-à-dire à 1 degré au-dessus de l'horizon; de là à l'horizon même elles sont considérables, mais elles ne doivent pas choquer, car si les observations de Greenwich (Bradley) ont donné à Laplace 35 minutes pour la réfraction horizontale, il faut dire aussi que celles de Milan (Carlini) ont donné 31 minutes, ce qui s'accorde avec ma formule.

» Cet accord n'est pas tout naturel, comme le dit ailleurs M. Laugier, qui ne voit là que le résultat d'une pétition de principe (1); c'est au contraire

(1) Voici les propres termes de M. Laugier, pages 523 et 524 :

« Quant à cette circonstance, qui paraît avoir tant frappé M. Faye, d'avoir retrouvé une » équation de même forme que l'équation de Bradley, *sans avoir consulté le ciel*, *sans avoir* » *eu recours à une seule observation astronomique*, elle ne prouve absolument rien de ce qu'il » veut prouver, et elle paraîtra toute naturelle si l'on remarque qu'il a précisément em- » ployé, dans son calcul, l'équation différentielle ordinaire de la réfraction astronomique, » laquelle, étant intégrée, conduit nécessairement à l'équation de Bradley. » S'il en était

un fait très-intéressant, car il prouve que la loi de la réfraction terrestre dont ma formule se déduit, sans intrusion d'aucun élément étranger, représente très-passablement, au point de vue astronomique, la constitution normale de l'atmosphère, c'est-à-dire la loi de succession des indices, d'une couche à l'autre, pendant la majeure partie du jour.

» En second lieu, M. Laugier trouve (p. 522, ligne 17) que l'introduction dans cette formule des valeurs diverses que le coefficient de la réfraction terrestre peut prendre dans la journée, produirait des variations de 6 secondes dans le calcul de la réfraction astronomique à 80 degrés du zénith, ce qui lui semble dépasser de beaucoup les erreurs des réfractions (moyennes?) à cette distance. Je le prie de vouloir bien considérer le petit tableau suivant que j'ai formé hier à l'aide d'un seul volume de l'observatoire de Greenwich.

---

ainsi, j'aurais commis une bien grossière erreur, et je ne me pardonnerais pas d'avoir présenté à l'Académie, comme une découverte intéressante, ce fait, qu'en partant de la réfraction terrestre on peut, sans consulter le ciel, calculer toute la Table des réfractions astronomiques. Mais l'argument de M. Laugier repose tout simplement sur une méprise. L'équation différentielle ordinaire de la réfraction

$$d\rho = -\frac{\frac{r_1 l_1}{rl}\sin z_1 \frac{dl}{l}}{\sqrt{1-\left(\frac{r_1 l_1}{rl}\sin z_1\right)^2}}$$

ne peut pas être intégrée, et, par conséquent, ne saurait *conduire nécessairement à l'équation de Bradley*. MM. Laugier et Mathieu oublient que, pour l'intégrer (*), il faut, de toute nécessité, y introduire une loi quelconque qui rattache les indices ou les densités aux rayons des couches. Les géomètres y ont essayé toutes sortes de lois, surtout celles qui permettent une intégration simple et élégante. C'est ainsi qu'ils sont tombés, par hasard, sur la formule de Bradley; mais les lois qu'ils ont imaginées ainsi n'avaient aucun fondement expérimental; de même, la formule de Bradley consiste en un simple artifice d'analyse fort heureux sans doute, mais dont la signification physique lui était inconnue. Ma découverte, si j'ose employer ce mot, consiste à montrer qu'une des lois dont les géomètres se sont servis dans le but unique de faciliter l'intégration, tout comme l'artifice purement analytique de Bradley, a une base physique jusqu'alors inconnue dans les faits relatifs aux réfractions terrestres. En tout cas, l'objection de mes contradicteurs reposse sur une méprise à laquelle j'avoue n'avoir rien compris avant de l'avoir lue dans les *Comptes rendus*.

(*) Elle peut être, comme on sait, intégrée *approximativement*; mais alors elle conduit à une expression de la forme

$$\rho = A \tang z_1 + B \tang^3 z_1,$$

qui n'a rien de commun avec la formule de Bradley et qui n'est plus applicable à toutes les distances zénithales.

Discordances observées d'un jour à l'autre.

Z = 74° 2'	β Corbeau	3",9
75 21	15 Argus	3,5
77 34	Antarès	5,2
80 15	ε Grand-Chien	7,2
81 55	Fomalhaut	5,3
85 39	α Colombe	10,0

» Ces discordances vont ainsi en grandissant jusqu'à l'horizon, où elles atteignent souvent plusieurs minutes. Il est bien curieux de rapprocher, à cet égard, les observations du Cap de Bonne-Espérance de celles de Greenwich. Là les étoiles qui culminent près de l'horizon sont précisément celles qui passent près du zénith de Greenwich, et l'on trouve qu'au moment même où les observations de γ du Dragon s'accordent fort bien entre elles à Greenwich, celles du Cap présentent des discordances de 10 secondes, d'un jour à l'autre, et même des erreurs absolues de 13 secondes. Le contraire a lieu précisément pour α de la Colombe. La cause en est évidemment dans les erreurs des Tables de réfraction où l'on ne tient nul compte de certaines variations de l'atmosphère, aussi fréquentes qu'incontestables; on en trouverait de bien plus fortes encore si l'on dirigeait les observations de manière à les mettre en évidence.

» La troisième objection de MM. Mathieu et Laugier porte sur une conséquence fort étrange, selon eux, qu'ils se sont crus autorisés à déduire de ma formule. De ce que la différentielle du facteur $\frac{1-2n}{4n}$ est $-\frac{dn}{4n^2}$, ils ont conclu que les variations de la réfraction astronomique deviendraient énormes quand n serait très-petit, de sorte que l'influence maximum de la réfraction terrestre aurait lieu quand son coefficient serait nul. MM. Laugier et Mathieu reculent devant cette conséquence; et moi aussi, mais non par les mêmes motifs. Ils n'ont pas remarqué que faire n nul dans ma formule, c'est supposer que l'atmosphère s'étend à l'infini, en conservant partout la même densité, c'est se placer gratuitement dans un de ces cas d'exception que j'ai soigneusement signalés et qui commencent à se produire lorsque n tombe notablement au-dessous de sa valeur minimum ordinaire, et surtout lorsqu'il devient négatif. Exiger qu'une formule quelconque se plie aux réfractions anormales ou qu'on en puisse faire varier les constantes d'une manière quelconque, c'est exiger l'impossible. Il suffit qu'on soit averti de l'existence passagère de ces anomalies, et sur ce point voyez page 388, lignes 14 et suivantes.

» Il y a plus : en examinant les variations dont il s'agit, on verra qu'elles sont loin d'être proportionnelles à $\frac{dn}{n^2}$, mais bien à $\rho\frac{dn}{n}$ multiplié par un facteur toujours moindre que l'unité, du zénith à l'horizon. En voici l'expression,

$$d\rho = K\rho\frac{dn}{n},$$

où l'on a

$$K = \frac{1}{1 + 2n + \frac{4n}{\alpha}\left(1 + \frac{\rho^2}{\alpha^2}\right)^{-1}} \quad \text{et} \quad \alpha = l_1 - 1 - \frac{1}{2}(l_1 - 1)^2 \ (*).$$

Ainsi les variations de la réfraction astronomique seront toujours une très-petite fraction de cette réfraction elle-même, tant que la variation du coefficient de la réfraction terrestre sera une petite fraction de la valeur actuelle de ce coefficient. Or, si l'on excepte les perturbations qu'aucune formule n'a charge de représenter, il se trouve, en fait, que les variations absolues de n sont d'autant moindres que n est lui-même plus petit, et cela est bien naturel, puisque les valeurs de n offrent un minimum fort peu variable d'un jour à l'autre et d'un bout à l'autre de l'année. C'est ce fait si remarquable sur lequel j'ai tant insisté dans les séances précédentes et dont M. Laugier peut lire la mention dans mon premier Mémoire, page 385 Il y verra qu'à l'époque du minimum les variations ordinaires sont de 0,006 d'un jour à l'autre, ce qui introduirait des variations de moins de 1″ dans le calcul des réfractions à 80 degrés. Voilà à quoi se réduiront d'ordinaire les variations étranges sur lesquelles MM. Mathieu et Laugier ont tant insisté.

» Leur dernière objection porte sur ce que la loi dont je suis parti n'étant pas rigoureuse, il n'est pas permis de l'introduire dans l'équation différentielle de la réfraction. L'insistance de mes adversaires me force à discuter ce reproche avec quelques détails ; je ne me bornerai donc pas à dire, comme je serais en droit de le faire, que la loi de Bessel et celle de Laplace ne sont pas plus rigoureuses que la mienne, en thèse absolue, et que ces deux grands géomètres se sont crus pourtant en droit d'introduire des lois empiriques dans la même équation différentielle.

(*) M. Biot m'a objecté que l'introduction du coefficient n, dans le calcul des réfractions astronomiques, aurait pour résultat de vicier ces réfractions jusque dans la partie du ciel où elles peuvent être calculées avec certitude. Il est facile de voir, par l'examen du coefficient K, que l'objection n'est pas fondée, ce qui d'ailleurs est évident de soi, à priori, et indépendamment de tout calcul.

» D'abord M. Mathieu nous dit (p. 524) pourquoi cette loi $\rho = 2nv$ est défectueuse : c'est qu'elle ne résulte pas rigoureusement de la loi de Laplace; c'est que Laplace ne l'en a déduite qu'à l'aide de simplifications qui ôtent tout caractère de rigueur à cette déduction. Ce raisonnement serait parfaitement juste si la loi de Laplace était elle-même rigoureuse. Or on sait bien que cette loi n'est nullement rigoureuse; on sait que Laplace l'a adoptée après en avoir essayé deux autres, dont l'une donnait une réfraction horizontale trop grande, l'autre une réfraction horizontale trop petite, du moins il le croyait ainsi. Il en a conclu naturellement que la vraie loi devait se trouver entre les deux; mais, dans l'ignorance où il était et où nous sommes encore de cette vraie loi, il s'est borné à combiner analytiquement les deux premières, de manière à obtenir pour l'équation différentielle de la réfraction la possibilité d'une intégration élégante. Or, je le demande, parce qu'une telle combinaison ne fournit pas rigoureusement la loi $\rho = 2nv$, est-on autorisé à dire que cette loi n'est pas vraie?

» Longtemps avant Laplace, on savait que la réfraction terrestre est proportionnelle à l'angle au centre, non pas dans la rigueur mathématique dont il ne saurait être question ici, mais sensiblement. Laplace s'est borné à montrer qu'on pourrait aussi déduire cette loi, à très-peu près, de la constitution hypothétique qu'il avait adoptée; mais, parce qu'il avait dû négliger quelque chose dans son analyse, il se serait bien gardé d'en conclure que la règle géodésique n'est pas exacte : de même qu'il ne se serait pas cru en droit de contester le coefficient $n = \frac{1}{15}$, parce que ses calculs lui donnaient $n = \frac{1}{11}$ (1).

» Après avoir montré combien sont peu fondées les objections qu'on a faites contre la rigueur de cette loi $\rho = 2nv$, il me sera bien permis de dire qu'on n'aurait même pas dû les formuler contre moi, car je n'ai jamais prétendu qu'elle fût rigoureuse. Bien au contraire, je m'exprime ainsi (p. 382) : « Afin de simplifier, et parce que le choix de la loi empirique qu'on assignera » à l'atmosphère est ici de peu de conséquence, pour le moment, je vais » déduire cette loi des données admises universellement pour la réfraction » terrestre et calculer la réfraction dans cette hypothèse.... »

---

(1) La seule objection valable, en pareille matière, se tirerait des calculs que M. Biot a basés sur les mesures directes de M. Gay-Lussac, en les reliant par une loi empirique qui représente, au moins pour ce jour-là, l'état réel de l'atmosphère. Toutefois il est indispensable de tenir compte, à ce sujet, des critiques de M. Regnault.

» Bien plus, je constate, p. 386, qu'elle assigne aux réfractions horizontales des variations beaucoup trop fortes, ce qui aurait bien pu, ce me semble, dispenser M. Laugier de m'objecter les trop fortes variations qu'il y remarque à 80 degrés. Qu'on me permette d'exposer à mon tour la critique de cette loi, telle que je l'ai faite moi-même il y a longtemps (1), c'est-à-dire depuis que j'ai songé à lui faire jouer un rôle provisoire en astronomie.

» D'une loi quelconque de réfraction astronomique, on peut toujours déduire la hauteur qu'elle assigne à l'atmosphère. Notre loi donne à très-peu près pour cette hauteur

$$h = 6366^{\text{kil}} \times \frac{\alpha}{2n}.$$

» Or, en admettant les valeurs précédemment employées pour α et n, on trouve $h = 14$ kilomètres. Cette hauteur de la dernière couche réfringente est certainement beaucoup trop petite. Donc la loi dont elle est déduite ne saurait être rigoureuse. En outre, quand ce coefficient n passe de son minimum normal à l'un de ses maxima diurnes, h se trouve souvent réduit dans une proportion tout à fait inadmissible. Comment concilier ces conséquences, la dernière surtout, avec l'aptitude reconnue de notre loi à représenter très-passablement les réfractions astronomiques, et parfaitement les réfractions terrestres? En examinant cette question, j'étais arrivé à la conclusion suivante, dont la seconde partie mériterait bien d'être vérifiée par l'expérience : A l'époque du minimum diurne, époque où l'équilibre est troublé dans le sens vertical, le coefficient de la réfraction terrestre est sensiblement indépendant de la hauteur des couches où l'on observe (2); mais il en dépend sensiblement à l'époque du maximum, et va en décroissant à partir du sol. Théoriquement, on aperçoit une raison physique de cette différence. Lorsque la température du sol et des couches basses s'élève pendant le jour, l'air surchauffé monte et se mêle avec les couches supérieures. Il se produit des courants verticaux ascendants et descendants que le trouble et les ondulations des images rendent bien sensibles, et ces mouvements établissent et maintiennent une certaine constitution normale de l'atmosphère où se réalisent fidèlement chaque jour les lois précédentes de la réfraction géodésique et astronomique, mais où les lois d'équilibre, telles

---

(1) Je pourrais rappeler aussi la critique que l'auteur de la *Mécanique céleste* a faite d'une loi équivalente, au point de vue de la distribution verticale des températures.

(2) C'est ce que l'observation confirme à toutes les hauteurs où l'on a pu porter des théodolites.

que M. Biot les formule d'après les pages si connues de la *Mécanique céleste*, peuvent bien ne se réaliser jamais. Il n'en est plus ainsi quand survient la période de refroidissement. Alors il n'y a plus de courants ascendants; *les images deviennent calmes;* les couches ne se mêlent plus; elles se contractent et se rapprochent du sol, tantôt plus, tantôt moins, en rayonnant vers les couches supérieures. Il en résulte un décroissement des indices plus rapide au début qu'il ne l'est pendant le jour, et il en résulte aussi que le coefficient n peut varier alors avec la hauteur. Peut-être les observations de signaux nous donneraient-elles encore une idée suffisante de la loi de ce décroissement, mais, en l'absence de toute donnée sur la réfraction nocturne, je n'ai pas dû me préoccuper beaucoup de ces questions : il me suffisait d'entrevoir l'explication de la difficulté que j'ai signalée dans mon Mémoire, au bas de la page 386, et de m'assurer que les considérations statiques auxquelles M. Biot attribue tant d'importance, se trouvent en défaut une fois par jour, et précisément à une époque où l'atmosphère est bien certainement constituée d'une manière normale et stable au point de vue des réfractions.

» En terminant, je rappellerai que les objections auxquelles je me suis efforcé de répondre ici ont laissé intact le fond même de la question principale : Doit-on tenir compte, oui ou non, des variations atmosphériques que ni le baromètre ni le thermomètre ne font connaître, quand on se borne à les consulter dans une seule couche, mais que la réfraction terrestre indique parfaitement? Sur ce point capital, les articles auxquels je réponds ne formulent qu'une négation pure et simple dont je ne crois pas que les hommes de science puissent se contenter. »

THÉORIE DES NOMBRES. — *Décomposition d'un nombre premier p ou de son double en m carrés, m > 2 divisant p — 1; par* **M. V.-A. Lebesgue.**

« *Solution.* Prenez pour un module premier p, relativement à une racine primitive g, les indices des $p-2$ nombres suivants :

$$2,\ 6,\ 12,\ \ldots\ s.(s+1)\ldots(p-2)(p-1),$$

doubles des nombres triangulaires, ou, ce qui revient au même, les indices des nombres

$$2,\ 6,\ 12,\ldots,\frac{p-1}{2}.\frac{p+1}{2},\ldots,\ 12,\ 6,\ 2,$$

Divisez ces indices par m et représentez par

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$$

le nombre des indices qui donnent respectivement les restes

$$0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

Il en résultera que les a_0, a_1, etc., seront tous pairs, sauf *un*, et que l'on aura toujours

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1} = p-2.$$

Pour m impair,

$$\sum a_i^2 - p = \sum a_i\, a_{i+1} = \sum a_i\, a_{i+2} \ldots = \sum a_i\, a_{i+m-1};$$

d'où

$$2p = \sum (a_i - a_{i+k})^2,\ m > k > 0.$$

Pour m pair,

$$\sum a_i^2 - p = \sum a_i\, a_{i+2} = \sum a_i\, a_{i+4} \ldots = \sum a_i\, a_{i+m-2}$$

$$\sum a_i\, a_{i+1} = \sum a_i\, a_{i+3} = \ldots = \sum a_i\, a_{i+m-1};$$

d'où

$$2p = \sum (a_i - a_{i+2k})^2, \quad \frac{1}{2} m > k > 0;$$

les sommes $\sum$ contenant m termes obtenus en faisant successivement $i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$; les indices $i+k$, $i+2k$ étant diminués de m, quand cela est possible.

» Ainsi, pour $m = 4$, $k = 1$ donnerait la formule

$$p = (a_0 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2.$$

» Eisenstein en a demandé la démonstration dans le tome XXVIII du *Journal* de M. Crelle, où il indique le calcul de a_0, a_1, a_2, a_3.

» La démonstration résulte sans difficulté de son Mémoire sur la division du cercle (*Journal* de M. Crelle, tome XXVII). Il est à remarquer que les formules de ce Mémoire ne diffèrent que par la forme de formules déjà données par M. Cauchy (*Mémoire sur la théorie des nombres, Bulletin de Ferussac*; 1829).

» La règle d'Eisenstein résulte des formules

$$\rho^m = 1, \quad p = \sum_{s=1}^{s=p-2} \rho^{inds\,(s+1)} \cdot \sum_{s=1}^{s=p-2} \rho^{inds\,(s+1)}.$$

» La formule plus générale

$$\rho^m = 1, \quad p = \sum_{s=1}^{s=p-2} \rho^{a\,inds - (a+b)\,ind\,(s+1)} \sum_{s=1}^{s=p-2} \rho^{-a\,inds + (a+b)\,ind(s+1)}$$

conduirait de même à une autre règle pour le calcul de $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ dans la formule

$$p = (a_0 + a_1\,\rho + a_2\,\rho^2 \ldots + a_{m-1}\,\rho^{m-1})(a_0 + a_1\,\rho^{-1} + a_2\,\rho^{-2} \ldots + a_{m-1}\,\rho^{-(m-1)}),$$

et l'on trouverait

$$2p = \sum (a_i - a_{i+k\omega})^2$$

$m = \mu\omega$, $\mu > k > 0$.

» Le nombre ω est le moindre multiple des plus grands communs diviseurs des nombres m et a, m et b, m et $a + b$.

» La formule précédente conduit directement aux formules (33), (35), (36), (37), (38) du Mémoire déjà cité de M. Cauchy. »

CORRESPONDANCE.

ZOOLOGIE. — *Observations sur quelques points de l'organisation des Actinies; par* M. **Jules Haime**. (Extrait d'une Lettre adressée à *M. Milne Edwards*.)

« Bien que les recherches de MM. Rapp, Dana, Leuckart, Berthold, Erdl, Kölliker, Hollard sur les Zoophytes du genre *Actinia*, de Linné, et le beau travail de M. de Quatrefages sur les Edwardsies aient bien fait connaître l'organisation générale du groupe des Actiniens, le nouvel examen auquel je viens de soumettre diverses espèces trouvées soit à Luc-sur-Mer, soit à Jersey, m'a cependant fourni quelques faits nouveaux que j'ai l'honneur de vous communiquer.

» Chez l'*Actinia effœta* (Linné), la tunique musculaire, qui est fort épaisse, présente une structure remarquable; les fibres transverses de la couche externe y prennent surtout un grand développement et se groupent de manière

à former des cordes très-fortes et très-serrées qui s'anastomosent en laissant entre elles des lacunes irrégulières, d'où résulte un tissu très-dense et très-résistant. Les pores qui traversent cette tunique fibreuse et les téguments qui la recouvrent, correspondent exactement aux loges sous-tentaculaires des premiers cycles ; ils sont généralement au nombre de vingt-quatre et se montrent ici dans le voisinage du pied, mais non pas tous à la même hauteur ; les douze pores qui font communiquer avec l'extérieur les loges du troisième cycle sont sur une zone inférieure aux douze autres, et ceux-ci occupent deux zones distinctes quoique très-rapprochées, les six pores des loges du second cycle étant un peu plus bas que ceux du premier.

» Des pores analogues, mais beaucoup plus nombreux, existent aussi chez l'*Actinia pedunculata* (Pennant); ils sont rapprochés du disque tentaculifère, et n'occupent pas le milieu des ampoules dont est garni le tronc de cette espèce, ainsi que quelques auteurs l'ont supposé, mais ils sont ouverts dans les intervalles de celles-ci. J'ai étudié chez cette même Actinie et chez l'*Actinia coriacea* (Cuvier), la structure des ampoules ou verrues qui retiennent à la surface de leur corps des grains de sable et des fragments de coquilles. Ce sont de véritables ventouses formées d'une couche de fibres concentriques et d'une couche de fibres rayonnantes ; toutes ces fibres sont extrêmement déliées et transparentes, et comme les tuniques tégumentaire et musculaire sont fort amincies dans les points qu'elles occupent, on conçoit que M. Hollard, qui les a observées sous de faibles grossissements, n'y ait vu autre chose que des bourrelets bilabiaux résultant de l'écartement des fibres transverses de l'enveloppe charnue.

» Le développement des bourses bleues qui bordent le disque tentaculifère de l'*Actinia equina* (Linné), est intimement lié à celui des loges sous-tentaculaires avec lesquelles leur cavité communique. Dans les individus dont le cinquième cycle n'est pas encore complété ou dépassé, on trouve dix-huit de ces bourses, et lorsqu'il y a cinq cycles ou cinq cycles et demi, leur nombre est de vingt-quatre ; chez les adultes, où les six cycles sont complets, on en compte quarante-huit ; en sorte qu'elles sont toujours en arrière de deux cycles au moins sur le développement des tentacules.

» Les tentacules ne sont pas tous représentés dans la chambre viscérale par une double lame mésentéroïde ; les lames mésentéroïdes des derniers cycles restent rudimentaires ou ne s'étendent que très-peu au-dessous du disque péristomien. Ainsi les adultes de l'*Actinia effœta* ont neuf cycles tentaculaires complets, sauf quelques irrégularités accidentelles, et cependant au-dessous du bord inférieur du tube gastrique on n'observe que quatre cycles

de lames mésentéroïdes; les lames des cinq derniers cycles ne descendent pas jusqu'à ce bord. Les ovaires ou les testicules qui, pendant l'été, apparaissent dans l'épaisseur des replis mésentéroïdes et finissent par les envahir presque entièrement, ne se montrent pas tous du premier coup; leur développement semble suivre une marche inverse de celle qu'ont suivie les lames mésentéroïdes elles-mêmes. Ce sont d'abord les lames des quatrième et troisième cycles qui présentent les organes reproducteurs les plus étendus, et les lames du deuxième et du premier cycle ne contiendront que plus tard les éléments de fécondation. Dans chaque lame, considérée isolément, le développement de la glande mâle ou femelle s'effectue de haut en bas.

» En décrivant les corps intestiniformes qui s'attachent au bord interne des lames mésentéroïdes, on a déjà distingué une partie supérieure plus grosse et plus colorée que la portion pelotonnée, mais on a cru que ces deux portions étaient en continuité directe. Il n'en est rien : chez l'*Actinia sulcata* (Pennant), j'ai parfaitement vu le petit cordon pelotonné se terminer en haut par une extrémité atténuée qui se rapproche beaucoup, à la vérité, de l'extrémité également atténuée du gros cordon, mais qui ne s'abouche pas avec elle. Les gros cordons ont toujours sur chacun de leurs côtés un feston très-régulier et muni de cils très-puissants, et souvent ils sont eux-mêmes formés d'un double tube. Ils sont essentiellement composés de globules, de petites cellules arrondies et d'une matière granuleuse; le feston qui les borde contient seul quelques nématocystes (capsules filifères) très-semblables à ceux de la peau. Dans l'*Actinia equina* ils occupent la portion supérieure des lames mésentéroïdes et se terminent au bord pyloroïde de l'estomac; dans l'*Actinia sulcata* ils remontent derrière le tube gastrique et s'insèrent par leur extrémité aux parois externes de celui-ci; chez l'*Actinia effœta* ils occupent seuls tout le bord interne des petites lames mésentéroïdes. Les petits cordons ou cordons pelotonnés proprement dits adhèrent dans toute leur longueur aux lames mésentéroïdes; ils sont composés d'un grand nombre de cellules arrondies et vibratiles et contiennent une certaine quantité de grands nématocystes. Ces deux sortes de cordons intestiniformes se retrouvent chez toutes les espèces que j'ai observées; mais chez les *Actinia pedunculata* et *effœta*, c'est-à-dire chez celles dont les parois du corps sont perforées, il existe en outre une troisième sorte de filaments tubuleux qui ne tiennent aux lames mésentéroïdes que par l'une de leurs extrémités devenue fibreuse et qui, flottant librement dans la chambre viscérale et dans les loges sous-tentaculaires, sortent, à la suite des contractions de l'animal, soit par la bouche, soit par les pores du tronc, soit aussi, mais plus rare-

ment, par l'extrémité perforée des tentacules. Ces cordons libres sont creusés d'un canal intérieur comme les précédents, mais sont presque entièrement composés de grands nématocystes. On voit donc qu'au lieu d'une seule espèce de cordons pelotonnés s'épaississant dans leur portion supérieure et se détachant dans certains cas pour être lancés au dehors, ainsi qu'on l'avait avancé, il y a en réalité dans certaines Actinies trois sortes de cordons tubuleux tout à fait indépendantes entre elles et distinctes à la fois par leurs rapports, leurs formes, leur composition et jusqu'à un certain point aussi par leur fonction.

» Chez diverses espèces on observe des loges périphériques des globules régulièrement arrondis et remplis de grains colorés, qui sont d'abord mis en mouvement par les courants du liquide nutritif et qui forment ensuite des amas plus ou moins considérables sur certains points des parois internes des loges. C'est à la présence de ces amas intérieurs, et non au pigment de la peau, que sont dues les couleurs plus ou moins foncées du disque et des tentacules des *Actinia pedunculata* et *sulcata*, ainsi que les bandes longitudinales jaunes qu'on remarque chez l'*Actinia effœta*. »

La séance est levée à 5 heures trois quarts.

L'heure avancée n'ayant pas permis de donner communication des pièces qui faisaient partie de la correspondance, ces pièces figureront dans le *Compte rendu* de la prochaine séance. F.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

L'Académie a reçu, dans la séance du 18 septembre 1854, les ouvrages dont voici les titres :

Énumération des plantes vasculaires des environs de Montbéliard; par M. CH. CONTEJEAN. Besançon, 1854; in-8°.

Observation de hernie traumatique du poumon, guérie sans opération sanglante; par M. GUSTAVE DUFOUR. Paris, 1854; broch. in-8°.

(Ces deux ouvrages sont présentés par M. DUVERNOY.)

Die fossilen... *Sur les restes fossiles de Pikermi, en Grèce, par* MM. L. ROTH *et* A. WAGNER. Munich, 1854; in-4°.

Ueber die... *Recherches sur les Entozoaires; par* M. SIEBOLD. Liepzig, 1854; in-8°.

(Ces deux ouvrages sont également présentés au nom des auteurs, par M. DUVERNOY, qui est invité à faire de chacun l'objet d'un Rapport verbal.)

Annales de la Société impériale d'Horticulture de Paris et centrale de France; août 1854; in-8°.

Bulletin de l'Académie impériale de Médecine, rédigé sous la direction de MM. F. DUBOIS (d'Amiens), secrétaire perpétuel, *et* GIBERT, secrétaire annuel; tome XIX; n° 22; 31 août 1854; in-8°.

Bulletin de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique; tome XXI, n° 8; in-8°.

Société impériale et centrale d'Agriculture. Séance publique annuelle du dimanche 23 juillet 1854, présidée par M. CHEVREUL. Paris, 1854; broch. in-8°.

Annales de la Propagation de la Foi; septembre 1854; in-8°.

Annales forestières et métallurgiques; 10 et 25 juillet 1854.

Cosmos. Revue encyclopédique hebdomadaire des progrès des Sciences et de leurs applications aux Arts et à l'Industrie, fondée par M. B.-R. DE MONFORT, *rédigée par* M. l'abbé MOIGNO; 3e année; Ve volume; 11e livraison; in-8°.

L'Agriculteur praticien. Revue de l'agriculture française et étrangère; n° 23; in-8°.

La Presse littéraire. Écho de la Littérature, des Sciences et des Arts; 3e année; 2e série; 26e livraison; 15 septembre 1854; in-8°.

Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des candidats aux Écoles Polytechnique et Normale, rédigé par MM. TERQUEM *et* GERONO; septembre 1854; in-8°.

Répertoire de Pharmacie. Recueil pratique rédigé par M. BOUCHARDAT; septembre 1854; in-8°.

Revue de thérapeutique médico-chirurgicale; par M. A. MARTIN-LAUZER; n° 18; 15 septembre 1854; in-8°.

Revue thérapeutique du Midi. Journal des Sciences médicales pratiques; publié par M. le Dr LOUIS SAUREL; n° 5; 15 septembre 1854.

The journal... *Journal de la Société asiatique de Bombay;* vol. V, n° 19, janvier 1854; in-8°.

The journal... *Journal de la Société d'Horticulture de Londres;* vol. IX; 3e partie; in-8°.

Astronomische... *Nouvelles astronomiques;* n° 917.

Gazette des hôpitaux civils et militaires; nos 108 à 110; 12, 14 et 16 septembre 1854.

Gazette hebdomadaire de Médecine et de Chirurgie; n° 50; 15 septembre 1854.

Gazette médicale de Paris; n° 37; 16 septembre 1854.

L'Abeille médicale ; n° 26 ; 15 septembre 1854.

La Lumière. Revue de la Photographie; 4e année ; n° 37 ; 16 septembre 1854.

La Presse médicale ; n° 37 ; 16 septembre 1854.

L'Athenæum français. Revue universelle de la Littérature, de la Science et des Beaux-Arts ; 3e année ; n° 37 ; 16 septembre 1854.

Le Moniteur des Hôpitaux, rédigé par M. H. DE CASTELNAU ; nos 109 à 111 ; 12, 14 et 16 septembre 1854.

L'Académie a reçu, dans la séance du 25 septembre 1854, les ouvrages dont voici les titres :

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, 2e semestre 1854 ; n° 12 ; in-4°.

Annales de l'Agriculture française, ou Recueil encyclopédique d'Agriculture; publié sous la direction de MM. LONDET *et* L. BOUCHARD ; 5e série ; tome IV ; n° 5 ; 15 septembre 1854 ; in-8°.

Annales des Sciences naturelles, comprenant la zoologie, la botanique, l'anatomie et la physiologie comparée des deux règnes, et l'histoire des corps organisés fossiles ; 4e série, *rédigée pour la zoologie par* M. MILNE EDWARDS, *pour la botanique par* MM. AD. BRONGNIART *et* J. DECAISNE ; t I ; n° 6 ; in-8°.

Cosmos. Revue encyclopédique hebdomadaire des progrès des Sciences et de leurs applications aux arts et à l'industrie, fondée par M. B.-R. DE MONFORT, *rédigée par* M. l'abbé MOIGNO ; 3e année ; Ve volume ; 12e livraison ; in-8°.

Journal d'Agriculture pratique. Moniteur de la Propriété et de l'Agriculture, fondé en 1837 *par* M. le Dr BIXIO, *publié sous la direction de* M. BARRAL ; 4e série ; tome II ; n° 18 ; 20 septembre 1854 ; in-8°.

ERRATA.

(Séance du 18 septembre 1854.)

Page 538, Mémoire de M. MAUMENÉE concernant l'action des fluorures sur l'économie animale.

Ce Mémoire a été renvoyé à l'examen d'une Commission composée de MM. Pelouze, Rayer et Bussy. C'est par erreur qu'on avait répété au lieu de ces noms, ceux des Membres de la Commission nommée pour le Mémoire de M. Thomson.